K. W. Hoffmann

Frankfurt a. M. 1977

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550826_0013

UNTERSUCHUNG DES TRANSFERS MATHEMATISCHER INHALTE AUF PHYSIKALISCHE AUFGABEN ALS FUNKTION UNTERSCHIEDLICHER BEHANDLUNG

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades

der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik

der

Johann Wolfgang Goethe-Universität

zu Frankfurt am Main

von

Karl-Wolf Hoffmann

aus Leipzig

Frankfurt am Main

Mai 1977

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik der
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt/Main

Dekan:	Prof. Dr. E. Schopper
Erster Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Weltner
Zweiter Berichterstatter:	Prof. Dr. N. Barth

Tag der mündlichen Prüfung: 12.7.1977

INHALT

		Seite
1.	Das Problem: Physikunterricht und mathematische Vorkenntnisse	1
1.1	Physikunterricht und die Bedeutung mathematischer Beschreibungen	3
1.2	Die Berücksichtigung der Anwendung mathematischer Methoden im Physikunterricht bei den Zielsetzungen des Mathematikunterrichts	12
1.3	Klassifikation der Hilfsfunktionen der Mathematik im Physikunterricht	14
1.4	Stand der Forschung zum Problem: Physikunterricht und Mathematik	16
1.4.1	Ergebnisse von Untersuchungen ohne Behandlung	17
1.4.2	Ergebnisse von Untersuchungen mit Behandlung	28
2.	Die Anwendungsproblematik als Transferproblem	34
2.1	Begriff des Transfers	34
2.2	Anwendungsproblematik im Physikunterricht als Transferproblem	38
3.	Analyse mathematischer Inhalte des Physikunterrichts	45
3.1	Klassifikation mathematischer Inhalte des Physikunterrichts	45
3.2	Analyse von Lehrplänen und Schulbüchern des Physik- und Mathematikunterrichts	47
3.3	Analyse gemeinsamer mathematischer Inhalte von Physik- und Mathematikunterricht der 7. - 9. Klasse	57
4.	Versuchsplanung	61
4.1	Grundlegende Überlegungen zum Versuchsplan	61
4.2	Kriterien zur Erfassung der Behandlungsunterschiede und Formulierung der Hypothesen	63
4.3	Versuchsplan	67
5.	Entwicklung der Untersuchungsmaterialien	70
5.1	Entwicklung und Darstellung der Unterrichtsmaterialien	70
5.1.1	Logische Analyse der Darstellungsformen und Transformationen von Funktionen	71

		Seite
5.1.2	Entwicklung des Lehrtextes	73
5.1.3	Beschreibung der Lehrtexte	74
5.1.4	Entwicklung der Leitprogramme und der zugehörigen Antwortbögen	76
5.1.5	Beschreibung der Leitprogramme	78
5.2	Entwicklung und Beschreibung der Testaufgaben	80
5.2.1	Entwicklung der Testaufgaben	80
5.2.2	Beschreibung der Testaufgaben	82
5.2.3	Entwicklung und Beschreibung des Lernspiels	85
5.2.4	Beschreibung der Verfahren zur Messung von Einstellungen	87
5.3	Beschreibung der Materialien zur Kontrolle der Vorkenntnisse	88
5.3.1	Figure Reasoning Test	88
5.3.2	Verständiges Lesen Test	88
5.3.3	Mathematische Vorkenntnis Test	88
5.3.4	Lese-Lern-Test	89
6.	Untersuchungsablauf	91
6.1	Durchführung der Untersuchung	91
6.1.1	Auswahl der Klassen	91
6.1.2	Beschreibung eines Untersuchungsablaufes und auftretender Schwierigkeiten	91
6.2	Durchführung der Auswertung	98
7.	Auswertung der Gesamtuntersuchung	101
7.1	Parallelisierung der Gruppen	101
7.2	Wichtige Einzelergebnisse der Vorkenntnistests	103
7.2.1	Schwierigkeiten der Schüler bei elementaren Rechenoperationen	103
7.2.2	Einfluß von Notations- und Kontextwechsel in den Aufgaben zum Lese-Lern-Test (LLT)	104
7.3	Ergebnisse und Hypothesenprüfung bezüglich der Kriteriumsaufgaben	106
7.3.1	Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse zu den Kriteriumsaufgaben	107
7.3.2	Prüfung der Hypothesen über Behandlungsunterschiede	111
7.3.3	Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse zu Hypothese 1 - 5	120

Seite

7.4 Analyse der Operationsfehler in den Kriteriumsaufgaben 122

7.4.1 Analyse der Operationsfehler in Test I 123

7.4.2 Zusammenfassung der Operationsanalyse zu Test I 132

7.4.3 Analyse der Operationsfehler in Test II 134

7.4.4 Zusammenfassung 145

8. Itemanalyse der Kriteriumsaufgaben 149

8.1 Ordnungsstrukturen in den Kriteriumsaufgaben 149

8.1.1 Clusteranalyse der Kriteriumsaufgaben 149

8.1.2 Analyse von Ordnungsstrukturen in den Kriteriumsaufgaben mit Hilfe der GUTTMANSKALA 151

8.1.3 Zusammenhang zwischen Lösungsverhalten in den Kriteriumsaufgaben und Parallelisierungsvariablen 154

8.2 Beschreibung der Ergebnisse zu den Subtests und Hypothesenprüfung 1 - 3 158

9. Nebenbefunde 160

10. Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse der Untersuchung und Schlußfolgerungen 165

11. Kritik und Ausblick 178

Anmerkungen 182

Literaturnachweis 188

Anhänge 1 - 4

1. Das Problem: Physikunterricht und mathematische Vorkenntnisse

> "Eine andere Folge des Niedergangs der klassischen Mathematik ist, daß Wissenschaftler anderer Gebiete nun dazu gezwungen sind, ihre Energien zu verschwenden, sich mit den für sie wichtigen Teilen der mathematischen Erbschaft herumzuschlagen. Tatsächlich wird die meiste Mathematik in Naturwissenschaft und Industrie von Nicht-Mathematikern geleistet. Damit versäumen die Mathematiker eine große Gelegenheit und außerdem leidet die ganze Nation unter der schlampigen und kostspieligen Mathematik, welche - oft unvermeidlicherweise - von Nicht-Mathematikern gemacht wird."(SPOHN, zit. nach JUNG,1976)

Mein Interesse an Anwendungsproblemen von Mathematik im Physikunterricht erwuchs aus Erfahrungen mit Physikstudenten Sekundarstufe I in Anfängerveranstaltungen. Viele Studenten konnten ihre mathematischen Kenntnisse auf physikalische Problemstellungen erst nach einer "Übersetzung" des Problems in die gewohnte mathematische Fragestellung und gewohnte mathematische Schreibweise (x-y-Schreibweise) anwenden. Nun konnten sie zwar das mathematische Problem lösen, nicht aber die Ergebnisse physikalisch interpretieren. VAN HIELE (1974) spricht in Bezug auf dieses Phänomen von einer "Systemtrennung" zwischen Mathematik- und Physik-Unterricht.

> "in the mathematics lesson they learn about vectors, which also occur in the physics instruction, though they are not aware of both being the same thing."(S.143)

Die Ursachen für diesen Zustand werden seit Jahrzehnten dem Mathematikunterricht angelastet (s. z.B. OERLEIN, 1937 und KULLMAN, 1966). Besonders die Einführung der Neuen Mathematik hat die massive Kritik vieler "Benutzer" herbeigeführt. So schreibt SWARTZ (1973, S. 134) sehr polemisch:

> "If you ever met a student who could solve $x = y \cdot z$ for y but could not solve $F = m \cdot a$ for m, why not proposition your local friendly math department to consider your mutual interest? It may be too late for the kids who never learned set theory in grade school, but at least you might be able to teach the physics students how to multiply and devide, make graphs, and may be even do some simple algebra. To be understood, math must be old and used."

HALL (1956, S. 93) weist diese einseitigen Vorwürfe, die dem Mathematikunterricht eine eigenständige Zielsetzung absprechen, schieden zurück. Er betont allerdings ebenfalls, daß an den Berührungspunkten beider Fächer Problem der Schüler nur unzureichend berücksichtigt werden:

"Many science teachers complain that their pupils have not been adequately prepared by the mathematics teachers. In the opinion of numerous educators, the mathematics teachers have just as much reason to say that the science teacher have not prepared their pupils properly...The transfer of the mathematical concepts taught on a symbolic basis in the mathematical classroom, to the social and scientific applications is left to the pupils. Unless a definite effort is made to assist him in applying mathematics to science, he will continue to fail to solve equations and formulas which arise in the science classroom even if he has had no trouble in solving the same basic problems in the regular mathematics classroom." (Hervorhebung d. Verf.)

Ein Verständnis dieser Äußerungen ist nur auf dem Hintergrund folgender Annahmen möglich:

1) Mathematische Inhalte und Methoden haben eine große Bedeutung für das Lernen im Physikunterricht
2) Diese Inhalte und Methoden sollen weitgehend im Mathematikunterricht behandelt werden
3) Die Anwendung der im Mathematikunterricht gelernten Inhalte und Methoden bereitet den Schülern im Physikunterricht große Schwierigkeiten.

Das Kernproblem der vorliegenden Arbeit ist es, die Bedeutung mathematischer Inhalte für den Physikunterricht der Klassen 7 - 9 anhand entsprechender Lehrpläne und Lehrbücher für Physik nachzuweisen und festzustellen, inwieweit diese Inhalte im Mathematikunterricht berücksichtigt werden können. An einem begrenzten mathematischen Inhalt soll dann empirisch untersucht werden, welchen Einfluß eine Berücksichtigung von in der Literatur aufgeführten Anwendungsprobleme im Mathematikunterricht auf den Transfer so gelernter Inhalte auf Physikaufgaben hat.

Die Relevanz dieser Untersuchung ergibt sich aus der engen Beziehung zwischen Mathematik- und Physiklernen. Diese Beziehung begründet sich darauf,

1) daß Mathematik eine zentrale Rolle in der Physik als Wissenschaft spielt
2) daß Physikunterricht als Unterricht über Physik die Kenntnis mathematischer Begriffe und Methoden voraussetzt
3) daß sich empirisch ein Zusammenhang zwischen "Physikerfolg" und mathematischen Vorkenntnissen nachweisen läßt.

1.1 Physikunterricht und die Bedeutung mathematischer Beschreibung

Die zentrale Bedeutung der Mathematik für das Verständnis physikalischer Theorien festzustellen, ist trivial, weil diese Theorien in der Formalsprache Mathematik formuliert sind. Physikalische Theorien zu begreifen setzt deshalb das Erlernen ihrer spezifischen mathematischen Ausdrucksweise voraus.

Schwieriger zu beantworten ist dagegen die Frage, warum die Physik den "Umweg" über die mathematische Darstellung gegangen ist und in welcher Weise mathematische Kenntnisse das Niveau physikalischer Erkenntnis determinieren. Diese Problematik, die im Rahmen der Geschichte der Naturwissenschaften und der Wissenschaftstheorie untersucht wird, hat auch für die Schulphysik zentrale Bedeutung, da nur über die Einsicht in diese Fragen dem Schüler ein Verständnis der typisch physikalischen Betrachtungsweise und die Rolle der Mathematik deutlich werden kann.

A Bedeutung der Mathematik für die Physik als Wissenschaft

Die aristotelische Naturphilosophie beherrschte für mehr als zwei Jahrtausende die Vorstellungen und Methoden der Erkenntnisforschung, die sich ausschließlich auf die Beschreibung und Formbetrachtung der Natur als Ganzes bezogen und in dem Weltbild des KOPERNIKUS einen Abschluß gefunden hatte.

Erst mit GALILEI begann eine wirkliche Analyse der Natur, die Entwicklung der mathematischen Naturwissenschaften, durch folgende methodische Änderungen (s. WEYL , 1966, S. 183):

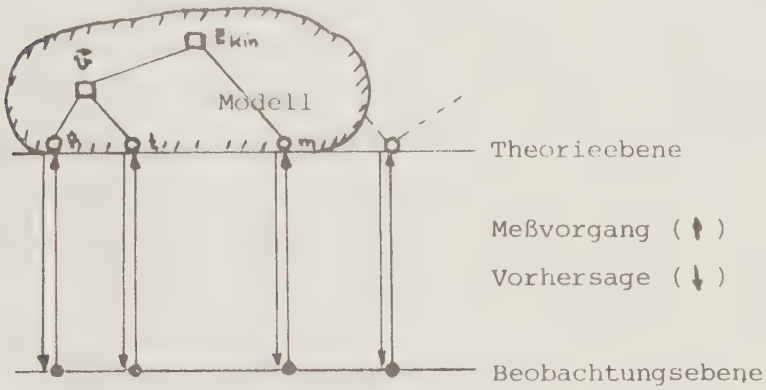
1) Isolierung einfacher Vorgänge; Verzicht auf den Versuch, ein Bild der Natur als Ganzes zu entwerfen
2) Quantifizierung von Begriffen der Beobachtungssprache durch Definition eines Meßprozesses
3) Idealisierung der Zusammenhänge zwischen quantitativen Begriffen (Größen) durch Nichtberücksichtigung von Nebenumständen (z.B. Fallgesetz).

Die Möglichkeit der Quantifizierung von Begriffen der Beobachtungssprache, d.h. die homomorphe Abbildung physikalischer Phänomene auf bekannte mathematische Strukturen mit logisch konsistenten Transformationsregeln, erlaubt eine mathematische Betrachtungsweise physikalischer Phänomene auf einer abstrakteren und allgemeingültigeren Ebene.

Im 17. Jahrhundert war die Kenntnis über mathematische Strukturen für eine physikalische Begriffsbildung noch nicht ausreichend entwickelt (s. OSBORN, 1969, S. 603). Deshalb waren zu dieser Zeit Physiker entscheidend an der Entdeckung und Erforschung neuer mathematischer Disziplinen beteiligt (z.B. NEWTON und BERNOULLI). Diese historische Verbindung der Physik und Mathematik wird aber schon bald durch die eigenständige Entwicklung beider Wissenschaften immer stärker in Frage gestellt. Während die Mathematik sich aus der Anschauung löst und sich ganz auf die syntaktische Ebene zurückzieht, verbleibt die Physik als empirische Wissenschaft im Bereich der Phänomene. Durch die schnelle Entfaltung der Mathematik kann sie nun weitgehend auf bekannte mathematische Methoden zurückgreifen (s. z.B. HEISENBERG, Matrizenmechanik). Ihre bleibende Bedeutung für die Physik besteht darin, daß mit ihrer Hilfe Natur beschrieben werden kann. Im einzelnen erlaubt sie:

1) Die beliebige Verfeinerung, die leichte Übersicht und Handhabung eines ganzen Kontinuums von Fällen, die sich nicht nur auf wirkliche, sondern auf alle möglichen Zustände eines Systems, Modells beziehen (s. MACH, 1919, S.459)
2) Die Definition theoretischer Begriffe durch Verknüpfung von Grundbegriffen, die sich einer direkten Wahrnehmung entziehen (z.B. Energie)
3) Die Zusammenfassung von Einzelaussagen zu Modellen, Theorien mit immer größerem Gültigkeitsbereich (Naturgesetze). Die logischen Folgerungen aus den Modellen können empirisch überprüft werden und erlauben eine stetige Verbesserung des Gültigkeitsbereichs
4) Die Losgelöstheit mathematisch definierter physikalischer Begriffe und Theorien von der Umgangssprache ermöglicht Wissenschaft als weltweiten Kommunikationsprozeß, und somit eine effiziente, stetige Weiterentwicklung physikalischer Theorien.

Physik als empirische Wissenschaft muß im Gegensatz zur Mathematik stets den Bezug zum Phänomen aufrechterhalten, wodurch wichtige Unterschiede zwischen dem methodischen Vorgehen beider Wissenschaften bedingt werden. So bedarf die Physik zusätzlicher Regeln, die dem Beobachtbaren mathematische Symbole (Meßprozeß) und dem Symbol wieder Beobachtbares (Interpretation, Vorhersage) eindeutig zuordnet.
Zum besseren Verständnis dieses Zusammenhangs zwischen Beobachtungs- und Theorie(Modell)-Ebene dient folgende Graphik:



● beobachtbare Phänomene

○ fundamentale Größen

□ abgeleitete, theoretische Größen

Durch den physikalischen Meßprozeß werden den beobachtbaren Phänomenen Zahlenwerte physikalischer Größen nach festgesetzten Regeln zugeordnet (z.B. $\vec{r}$,t,m). Dabei muß nach SUPPES und ZINNES (1963) angebbar sein, welche Relationen im Bereich der Meßwerte welchen Relationen im Bereich der gemessenen Objekte entsprechen und gegen welche logische Transformationen diese Entsprechungen invariant sind. Mithilfe dieser Transformationen (mathematische Operationen) lassen sich in der Physik abgeleitete Größen definieren ($\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$; $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$).
Diese hypothetischen Konstrukte und ihre formalen, logischen Verknüpfungen stellen nach TORGERSON (1967) ein Modell dar.
Aus dem Modell müssen sich (durch Anwendung mathematischer Operationen) Vorhersagen über beobachtbare Phänomene ziehen lassen, die einer empirischen Überprüfung zugänglich sind (z.B. aus E_{kin} = const. und m = const. $\rightarrow |\vec{v}|$ = const. $\rightarrow$ Vorhersage: $|\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)| = |\vec{v}| \cdot \Delta t$).

Demgegenüber bewegt sich die heutige Mathematik ausschließlich auf der Ebene der Syntax und bedarf keinerlei Zuordnungsregeln zwischen Theorie und Dingwelt(Metawissenschaft).
Im Rahmen der Physik stellt sie zwar ein leistungsfähiges Instrument dar, aber eben nur ein Instrument, das viele physikalische Fähigkeiten nicht ersetzen kann. z.B.: das Aufsuchen neuer theoretischer Begriffe zur Vereinfachung von Modellen; das Planen und Durchführen eines Experiments; die Interpretation neuer Ergebnisse, die selten der Genauigkeit gesicherter physikalischer Erkenntnisse entsprechen; Kenntnis der nicht formalisierbaren Bestände der Physik.
Eine Nichtberücksichtigung dieser Unterschiede verführt z.B. dazu, ein Verstehen physikalischer Phänomene mit der Kenntnis mathematischer Modelle (Formeln) gleichzusetzen, obwohl z.B. analoge mathematische Strukturen kein Kriterium für die Ähnlichkeit zugrundeliegender physikalischer Prozesse darstellen.
Die mangelnde Unterscheidung zwischen dem methodischen Vorgehen in Mathematik und Physik führt auch zu dem Mißverständnis, man könne die Richtigkeit physikalischer Modelle im mathematischen Sinn beweisen. Schon HERTZ (1894, S. 1) weist darauf hin, daß es sich bei Modellen um innere Scheinbilder der Dinge handelt, die so beschaffen sind, daß die denknotwendigen Folgen der Modelle mit den naturnotwendigen Folgen der Gegenstände übereinstimmen. Nicht Modelle, sondern nur deren Folgen sind demnach einer empirischen Prüfung zugänglich.
Die Leistungsfähigkeit, aber auch die Grenzen physikalischer Modelle in der Physik dem Schüler und Studenten klarzumachen, heißt sie vor eine Mystifizierung der Mathematik in der Physik zu bewahren.

B Die Bedeutung der Mathematik für Physik als Schulfach

Die Bedeutung der Mathematik für den Physikunterricht kann nur im Zusammenhang mit dessen Zielen untersucht werden, weil durch diese in hohem Maß die mathematischen Voraussetzungen definiert werden.

JUNG (1970, S.22) sieht das Ziel des Physikunterrichts in einer

> "Einführung in die Physik, d.h. der Erwerb eines Grundbestandes physikalischer Begriffe, Aussagen und Methoden in ihrem systematischen Zusammenhang. Dieser Grundbestand sollte so ausgewählt sein, daß er den Erwerb weiteren Wissens erleichtert, für Erscheinungen in Natur und Technik relevant ist und für die Arbeitsweise der Physik typische Anlässe liefert."

Diese Zusammenfassung einer in Kap 1 und 2 (s. ebd) gebrachten ausführlichen Analyse möglicher Begründungen für die Auswahl physikalischer Inhalte des Physikunterrichts läßt drei Entscheidungsebenen erkennen:

1. Sie sollen Lernen erleichtern (lernpsychologische Ebene)
2. Sie sollen relevant sein (normative, gesellschaftliche Ebene)
3. Sie sollen für Physik typisch sein (fachwissenschaftliche Ebene)

Beginnen wir mit dem fachlichen Aspekt. Wie schon in Abschnitt 1.1 ausgeführt, besteht die typische Arbeitsweise der Physik in der Entwicklung von Modellen für die Voraussage von Phänomenen. Damit verbunden ist eine Loslösung der Sprache der Physik von der Umgangssprache, also die Entwicklung einer Theoriesprache, die gewisse Mindestanforderungen hinsichtlich der Eindeutigkeit, Übersichtlichkeit und Kürze erfüllt. Erst die Abtrennung des Symbols von seiner Bedeutung, die Mathematisierung, ermöglicht Überlegungen, Schlüsse, die in der Umgangssprache unmöglich sind. Was in physikalischen Begriffen ausgedrückt wird, war vorher im Vorstellungsbereich der Menschen nicht vorhanden. Ein Versuch, durch eine bildhafte Sprache das zu veranschaulichen, was nicht Element der Anschauung ist, muß notwendigerweise scheitern. OPPENHEIMER (S. 62) schreibt:

> "Aber Worte würden bald umständlich und fremd werden und eine schiefe Vorstellung von dem geben, was sich mathematisch einfach und schön ausdrücken läßt."

Will man demnach die Beschreibungsweise der Physik dem Schüler vermitteln, so kann man gerade nicht auf der Ebene der Umgangssprache verbleiben, sondern muß die Bedeutung der Mathematik für physikalische Begriffsbildung, für die mathematischen Modelle und deren Schlußfolgerungen im Unterricht demonstrieren. Daraus ergibt sich notgedrungen ein gewisses Maß an mathematischen Vorkenntnissen, auf die auch im Physikunterricht nicht verzichtet werden kann, wenn man aus fachsystematischen Gründen bestimmte Phänomene behandeln will.

Nun kann man die Auswahl der Inhalte nicht nur nach fachlichen Kriterien bestimmen, sondern muß auch die lernpsychologischen Voraussetzungen (Vorkenntnis, intellektuelle Leistungsfähigkeit) der Schüler mit berücksichtigen. Dabei beziehen sich die physikalischen Vorkenntnisse weitgehend auf Alltagserfahrungen, die

mit Hilfe umgangssprachlicher Begriffe klassifiziert wurden. Die Interferenz dieser Begriffe mit denen der Physik lassen vielfältige Lernhemmungen erwarten (s. RANG, Zur negativen Transferwirkung von Schultradition und Umgangssprache, 1975), so daß von dort aus frühzeitig eine exakte, stärker mathematische Definition physikalischer Begriffe angestrebt werden muß (s. JUNG/SCHWEDES, 1975). Zum anderen verlangt aber das intellektuelle Leistungsniveau des Schülers den langsamen Übergang von dem Anschaulichen, Konkreten zum Abstrakten, zur Mathematik. Eine wesentliche Aufgabe der Physikdidaktik liegt gerade in der konstruktiven Bewältigung dieses Widerspruchs. Konstruktiv deshalb, weil durch Umstrukturierung und Vereinfachung die lernpsychologisch relevanten Aspekte allgemeiner, komplexer Begriffe und Aussagen zur Systematisierung physikalischer Einzelaussagen auf der Schulebene verfügbar gemacht werden müssen, die in dieser Form nicht in der Physik vorhanden waren. Lernpsychologische Überlegungen, die eine möglichst frühzeitige Einführung allgemeiner physikalischer Konzepte wie Wechselwirkung, Energie, Impuls zum Abbau von Lernbarrieren für spätere Begriffsbildung verlangen, bedingen neben fachsystematischen Kriterien ebenfalls einen stärkeren Bezug zu mathematischen Inhalten (s. z.B. JUNG/SCHWEDES, 1975, die für eine frühzeitige Berücksichtigung des Vektorcharakters von Geschwindigkeit in der 4. Klasse plädieren). Entscheidend ist dabei, daß durch didaktische Bemühungen immerhin das mathematische Niveau zur Beschreibung komplexer physikalischer Sachverhalte entscheidend variiert werden kann (s. z.B. OREAR, 1961). Weitgehend ungeklärt ist dabei die Frage, welcher Zusammenhang zwischen mathematischem Niveau und physikalischem Begriffserwerb besteht. PARQUE (1966, S. 405) schreibt hierzu:

> "The professional literature reveals that students who have received a non-mathematical instruction in physics, take longer to obtain understanding in basic concepts, and transfer of learning is weaker than those students receiving a mathematical approach."

Zusammenfassend kann man feststellen, daß sowohl aus lernpsychologischen als auch fachlichen Gründen den abstrakteren physikalischen Größen und Beziehungen und damit der mathematischen Betrachtungsweise eine zentrale Bedeutung im Physikunterricht zukommt. Dagegen hängt die Bedeutung bestimmter mathematischer Inhalte noch entscheidend von der Abgrenzung des

fachlichen Niveaus und der Möglichkeit fachlich sinnvoller Vereinfachung ab. Dies ist bei den folgenden Betrachtungen über die "typischen" Mathematikinhalte des Physikunterrichts zu berücksichtigen.

Fragt man nach den physikrelevanten Mathematikkenntnissen in der Schule, so muß man sich auf ein bestimmtes Vorgehen im Physikunterricht beziehen. Sei es, daß man die gängigen Physikschulbücher, Lehrpläne analysiert oder aber mit Hilfe von Experten (Lehrer) eine Liste der als wichtig anzusehenden mathematischen Inhalte zusammenstellt.
Unabhängig vom Weg, der gewählt wurde, wird für den Physikunterricht in der Literatur übereinstimmend berichtet, daß sich dessen mathematische Inhalte weitgehend auf die der klassischen Mathematik beziehen (s. z.B. CAIN/LEE 1963, RANG et al.,1972, Rep. of the Joint Royal Society, 1973; siehe auch eigene Analysen zum mathematischen Gehalt von Physikschulbüchern und Lehrplänen, Kap. 3).
Diese lassen sich folgenden mathematischen Teilbereichen zuordnen:
Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Vektoren.
Interessant im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit ist, daß in neuerer Zeit "Graphen" als Extrabereich explizit betont werden (s. z.B. Rep. of the Joint Royal Society, 1973, S. 244; BAUER 1976, S.7). Wohl deshalb, weil sie auf der einen Seite eine Verbindung zwischen Anschauung und symbolischer Repräsentation darstellen, zum anderen aber in der Fachdidaktik nicht die ihnen zukommende Beachtung gefunden haben (s. JUNG, 1970, S. 37; BRANDWEIN et al., 1958, S. 312-313).

Ein zentrales Problem für den Physikunterricht, das sich aus der Anwendung mathematischer Methoden ergibt, ist die Frage, wer für die Bereitstellung dieser Inhalte verantwortlich ist. Die Praxis in den Physikbüchern (s. RANG et al., 1972), aber auch die Kritik vieler Physiker (s. SWARTZ, 1973; GEORGE, 1974;ZERBST et al 1975) läßt erkennen, daß diese Aufgabe weitgehend dem Mathematikunterricht zugeschrieben wird. Die Zielsetzung der Neuen Mathematik (s. Abschnitt 1.2) verweist aber stärker in Richtung auf Exaktheit mathematischer Strukturbegriffe und auf die Axiomatik, was für die Ebene der Schulphysik ohne praktische Re-

levanz ist. LENNÉ (1969, S. 99) vermutet in diesem Zusammenhang, daß durch die Zweigleisigkeit der Neuen Mathematik (Strukturelle und traditionelle Inhalte) bei konstanter Unterrichtszeit in Mathematik erhöhte Defizite in Verwendungssituationen zu erwarten sind. Für den Physikunterricht würde sich daraus die Notwendigkeit ergeben, die für ihn relevanten Inhalte selbst bereitzustellen. Im universitären Ausbildungsbereich läßt sich diese Tendenz schon erkennen (s. z.B. DAHNKE, 1975; NÄGERL, 1975; WELTNER, 1975), während auf der Ebene der Schulphysik im deutschsprachigen Raum noch immer davon ausgegangen wird, daß die Schüler diese Inhalte weitgehend im Mathematikunterricht lernen. In den USA dagegen existieren schon eine Reihe integrierter Programme (s. KULLMAN, 1966). Die Gefahr, die hieraus dem Mathematikunterricht erwächst, wird auch von den Mathematikern immer stärker erkannt. So schreibt FREUDENTHAL (1968, S. 8):

> "I am convinced, if we do not succeed in teaching mathematics so as to be useful, users of mathematics will decide that mathematics is too important a teaching matter to be taught by the mathematics teacher. Of course this would be the end of all mathematics education."(s. hierzu auch SPOHN, 1971; BAUER, 1976).

Aber auch dann, wenn im Mathematikunterricht wieder verstärkt die klassischen Inhalte zur Geltung kommen, verbleibt das Problem der Anwendung dieser Kenntnisse im Physikunterricht. Hierauf soll in Abschnitt 1.3 noch gesondert eingegangen werden.

Aus der mathematischen Darstellungsform physikalischer Phänomene erwachsen dem Schüler im Physikunterricht weitere Probleme, die hier vollständigkeitshalber erwähnt werden sollen:

1) Die Vermittlung gesicherter Bestände der Physik(Paradigmata) verführt den Lehrer dazu, die mathematischen Darstellungen dem Schüler als Selbstverständlichkeit mitzuteilen, ohne auf den Mathematisierungsprozeß einzugehen
   BRANDWEIN et al. (1958, S.313) charakterisieren dieses Vorgehen sehr treffend:

   > "To many teachers a procedure such as this (gemeint ist der Algebraisierungsprozeß) seems painfully slow. Since the answer (law, etc.) is known, why not tell it to them and get on to something else? Such a process, all too commonly used, leaves the student out of the creative activity."

Dadurch wird Physikunterricht zum Informationsunterricht über mathematische Modelle in der Physik.

2) In engem Zusammenhang mit dem Selbstverständnis mathematischer Modelle (Formeln) steht die Tendenz, diese Modelle als eigentliches Ziel der Physik hinzustellen und dadurch die Rückübersetzung der Ergebnisse in die Beobachtungssprache (die Vorhersage von Phänomenen) aus dem Unterricht auszuklammern. Damit wird dem Schüler das Verständnis der Idealisierung im mathematischen Modell und eine Einschätzung der Rolle der Mathematik für Physik unmöglich gemacht. Bildlich gesprochen, muß man dem Schüler nicht nur zeigen, wie er auf den Berg (mathematisches Modell physikalischer Phänomene) hinaufkommt, sondern auch, wie er wieder herunterkommt.

Faßt man zusammen, so ergibt sich die Bedeutung der Mathematik für den Physikunterricht aus der mathematischen Beschreibungsweise physikalischer Phänomene. Dabei beziehen sich die in der Schule behandelten physikalischen Gebiete weitgehend auf klassische Mathematikinhalte, was sowohl lernpsychologisch als auch historisch zu begründen ist. Die Bereitstellung dieser Mathematikinhalte für den Physikunterricht wird noch immer dem Mathematikunterricht weitgehend zugeschrieben. Zum Verständnis mathematischer Anwendungsprobleme in Physik muß deshalb auf die Ziele des Mathematikunterrichtes eingegangen werden.

1.2 Zielsetzung des Mathematikunterrichts

Eine ausführliche Zusammenfassung der Entwicklung der Zielsetzungen in der Traditionellen und Neuen Mathematik und deren praktische Realisierung ist bei LENNÉ (1969) nachzulesen. Hier sollen speziell nur die für die Anwendungsproblematik von Matematik im Physikunterricht als relevant angesehenen Änderungen in der Zielsetzung der Neuen Mathematik aufgeführt werden (s. LENNÉ, S. 81-91).

1) Rein stofflich ist die Strukturmathematik Grundlage der Neuen Mathematik, wodurch die Mengenlehre als Basis aller Strukturmathematik von Anfang an in den Unterricht eingeführt werden muß. Durch eine wachsende Verschärfung der Begriffe, axiomatisch-deduktive Einführung von Strukturen, wird der fachliche Aspekt in Hinblick auf die Universitätsmathematik betont.
   Im übrigen bleiben viele wichtige Inhalte der Traditionellen Mathematik erhalten.

2) In der Neuen Mathematik hat sich,wie schon oben erwähnt, durch deren Zweigleisigkeit bezüglich traditioneller und struktureller Inhalte das Problem der Stoffülle drastisch verschärft. Dies muß sich in doppelter Weise negativ für die Verwendungssituation auswirken:

   a) Bei gleichbleibender Unterrichtsstundenzahl in Mathematik steht für die einzelnen Inhalte weniger Zeit zur Einführung und Festigung zur Verfügung.
   b) Darüber hinaus bemerkt LENNÉ (S.99), daß der intellektuelle Aufwand zur Kontrolle der zusätzlichen Merkmale der verschärften Begriffe in Verwendungssituationen wahrscheinlich quadratisch wächst.

3) Deutliche Absage an allgemeine, über die Mathematik hinausweisende Bildungsziele und nicht zuletzt auch an allgemeine pädagogische Theorien, die zu einer Begrenzung der fachlichen Ansprüche von übergreifenden Gesichtspunkten her führen könnten (S. 82).

Allerdings wird von LENNÉ darauf hingewiesen, daß über die oben genannten Tendenzen hinaus in der Neuen Mathematik sehr deutlich eine Differenzierung in zwei Hauptrichtungen, eine rigorose und eine gemäßigte Richtung, festgestellt werden kann (S. 84/85).

Die rigorose Richtung verfolgt die Angleichung der Schulmathematik an die Universitätsmathematik (deduktiv-axiomatische Methode), während die gemäßigte Richtung stärker auf die Bedeutung der Mathematisierung (induktive, die mathematische Schülertätigkeit betonende Methode) im Unterricht hinweist. Für den Physikunterricht fruchtbare Inhalte werden nur von der gemäßigteren Richtung erwartet, da bei deren Vertretern jeder mathematisierbare Tatbestand als Modell einer allgemeineren Struktur aufzufassen ist, an dem mathematische Strukturen sichtbar gemacht werden können; also auch physikalische Modelle. ENGEL (1968, S.202) fordert sogar:

> "If for some branch of mathematics there are no convincing applications, this branch of mathematics should not be taught."

Zur Zeit bereitet noch die Suche nach einsichtigen Beispielen, die den Mathematikunterricht nicht zusätzlich mit der Erarbeitung fachfremder Inhalte zu stark belastet, erhebliche Schwierigkeiten.

> "The big unfinished task is to collect appropriate examples of honest applied mathematics for earlier levels of education... A major, probably international effort is needed to collect a sufficient variety of examples to fit all our different school situations."(POLLAK,1968, S.30)

Im Gegensatz zum Vorgehen in England (s. LYNESS, 1968) sollten sich diese Beispiele m.E. nicht ausschließlich auf physikalische Gebiete, sondern auf alle Anwendungsbereiche der Mathematik beziehen.

In der Literatur kann eine wachsende Tendenz festgestellt werden, daß die Mathematikdidaktik in zunehmendem Maße wieder die Interessen ihrer "Abnehmer", und damit auch die des Physikunterrichts, berücksichtigt, indem sie sowohl traditionelle Inhalte als auch deren Anwendungssituationen stärker hervorhebt. Hervorzuheben ist dabei, daß diese Entwicklung nicht nur als Antwort auf die massive Kritik der Realwissenschaftler zu verstehen ist, sondern sich m.E. in hohem Maße auch auf Schwierigkeiten im Mathematikunterricht begründet (s. BAUER, 1976). Von dieser zunehmenden Berücksichtigung pädagogischer Dimensionen im Mathematikunterricht wird eine Verbesserung für den Physikunterricht bezüglich traditioneller Rechenverfahren erwarte

1.3 Ansatz zur Klassifikation mathematischer Anwendungssituationen in Physik und dabei auftretender Anwendungsprobleme

Die Klassifikation von mathematischen Anwendungssituationen bezieht sich auf ein von NEDELSKY (1949, S. 345) entwickeltes Schema von Anwendungssituationen physikalischer Methoden im Physikunterricht. Hierbei wurde NEDELSKYs Ansatz auf mathematische Methoden eingeschränkt und mit neuen Demonstrationsbeispielen versehen.

Es werden drei verschieden komplexe Anwendungsebenen unterschieden:

1) Anwendung mathematischer Methoden in einer abstrakten Situation - klar definiert mit einem Minimum an physikalischen Kenntnissen als Voraussetzung.
   Hierunter werden von mir solche Situationen verstanden, in denen der Schüler bei vorgegebener Fragestellung mathematische Operationen auf physikalische Zusammenhänge anwendet, ohne den semantischen Aspekt berücksichtigen zu müssen.

   Bsp.: Auflösung von Gleichungen nach vorgegebener Variable, graphische Darstellung von Wertetabellen, Berechnung von Funktionswerten zu vorgegebenem Argument, usw.

2) Anwendung mathematischer Methoden in einer "akademischen" Situation, d.h. die Anwendung eines spezifischen mathematischen Formalismus auf eine idealisierte physikalische Situation, wobei auch semantische Aspekte symbolischer Darstellung berücksichtigt werden müssen.

   Bsp.: Bestimmung einer Wertetabelle zu vorgegebenem experimentellem Aufbau und Fragestellung; Übertragung eines physikalischen Gesetzes auf ein neues, idealisiertes physikalisches Phänomen.

3) Anwendung mathematischer Methoden in einer komplexen, offenen Situation, die die selbständige Zuordnung mehrerer mathematischer Inhalte zur Lösung eines physikalischen Problems erfordern.

   Bsp.: Entwicklung eines Versuchs- und Auswertplanes zur Bestimmung des Hook'schen Gesetzes. Analyse irrelevanter Parameter eines Phänomens.

Die weiteren Ausführungen und die empirischen Untersuchungen in dieser Arbeit beziehen sich fast ausschließlich auf Probleme mathematischer Anwendungen in abstrakten Situationen (physikalisch-

mathematische Aufgabenstellung). Diese Einschränkung der Fragestellung wird wie folgt begründet:

1) Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen stellen keine ausreichende Basis weiterführender Fragestellungen dar.

2) Die Anwendung formaler Operationen in abstrakter Situation zur Umstrukturierung experimenteller Ergebnisse hat im Physikunterricht eine große Bedeutung. Erst sie erlaubt in der Regel ein Erkennen quantitativer Zusammenhänge.

3) Noch immer bezieht sich ein Großteil der Übungen im Physikunterricht auf die Umformung von Gleichungen und die Berechnung von Größen (s. z.B. DORN, 1974).

4) In der Literatur wird immer wieder hervorgehoben, daß schon auf der Ebene abstrakter Aufgabensituationen dem Physikunterricht große Probleme erwachsen (s. Abschnitt 1.4).

5) Die Anwendung mathematischer Methoden in akademischen und offenen Situationen setzt die Kenntnis dieser Methoden in abstrakten Situationen voraus.

6) Untersuchungen von Anwendungsproblemen in physikalischen Problemsituationen verlangen die Kontrolle physikalischer Vorkenntnisse, wobei m.E. eine Parallelisierung der Gruppen nur über zusätzlichen Physikunterricht möglich ist. Dies verlangt die Koordination zweier Fächer, was mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden ist.

Deshalb ist die eingeschränkte Behandlung des Anwendungsproblems in vorliegender Arbeit ausschließlich methodisch begründet und stellt keine Überschätzung des relativ formalen Aufgabenaspekts im Physikunterricht dar.

Zur detaillierteren Betrachtung möglicher Ursachen für Anwendungsprobleme mathematischer Methoden auf Physikaufgaben wird zwischen folgenden verschiedenen Aspekten unterschieden:

1) Inhaltsproblem: Wichtige Inhalte und Methoden zur mathematischen Behandlung empirischer Größenbeziehungen werden im Mathematikunterricht entweder gar nicht oder zu spät für den Physikunterricht behandelt (z.B. Idealisierung von Meßwerttabellen durch mathematische Formeln, Parameterdarstellungen von Funktionen, Maßstabsbestimmung). Die Exaktheit mathematischer Begriffsbildung erscheint vielfach zu "fein" für physikalische Fragestellungen (s. JUNG, 1976).

2) Notationsproblem: Im Mathematikunterricht werden Inhalte und Methoden stets an Aufgaben, die in mathematischer Konvention (x-y-Schreibweise) notiert sind, eingelernt. Da sich auch die Algorithmen (z.B. Steigungsformel) auf diese Notation beziehen, verlangt die Anwendung bei physikalischen Aufgaben die Kenntnis von m.E. nicht gelernten Transformationsregeln.

3) Kontextproblem: Im Gegensatz zu Mathematikaufgaben verlangt die physikalische Aufgabe eine Erläuterung des betrachteten Phänomens und der physikalischen Bedeutung der verwendeten Symbole, auch dann, wenn dieser Kontext für die Lösung der Fragestellung irrelevant ist. Diese zusätzliche Information kann die Anwendung eines Kalküls erheblich erschweren.

4) Verfügungsproblem: Eine weitere Ursache, auf die immer wieder hingewiesen wird, betrifft die mangelnde Verfügbarkeit mathematischer Kenntnisse in späteren Situationen, obwohl diese Kenntnisse im Mathematikunterricht behandelt worden waren (s.z.B. BAUER, 1976; NÄGERL et al. 1975)

Diese Annahmen, die im folgenden durch empirische Untersuchungen zu belegen sind, lassen verschiedene Niveaus erkennen, auf die man im Mathematik-Unterricht zur Verbesserung von Anwendungsproblemen eingehen könnte.

.4 Empirische Untersuchungen zur Anwendungsproblematik und Bedeutung der Mathematik für den Physikunterricht

Die bisherigen Aussagen bezogen sich ausschließlich auf logische Analysen und subjektive Stellungnahmen zum Zusammenhang Mathematik und Physik. Empirische Untersuchungen über den Einfluß mathematischer Kenntnisse auf den "Erfolg im Physikunterricht" sind methodisch sehr schwierig, weil kein allgemein verbindlicher, operational definierter Konsens über das Kriterium "Erfolg" besteht. Damit bleibt es jedem Untersucher selbst überlassen, durch die Auswahl der Physikaufgaben das Kriterium zu definieren. Je nach Art der mathematischen Voraussetzungen in den Physik-Aufgaben wird man dabei sehr unterschiedliche Zusammenhänge zwischen Mathematik- und Physikkenntnissen nachweisen können.

Diese Anmerkungen gelten auch für die folgende Zusammenstellung von Untersuchungsergebnissen. In diesem Zusammenhang muß ebenfalls darauf hingewiesen werden, daß die mangelhafte oder fehlende Beschreibung der Behandlung und der Kriteriumaufgaben, aber auch die unkritische Verwendung statistischer Verfahren die Bedeutung der berichteten Ergebnisse sehr stark einschränkt. Ein Bezug dieser Literatur zur vorliegenden Arbeit ist deshalb häufig spekulativ. Besonders deshalb, weil diese Untersuchungen fast ausschließlich an Studenten durchgeführt wurden.
Ein Ziel dieser Literaturübersicht ist es, empirisch untersuchte mathematische Probleme im Physikunterricht aufzuzeigen, die möglicher Weise im Rahmen des Mathematikunterrichts berücksichtigt werden könnten.

1.4.1 Untersuchungen zum Anwendungsproblem von Mathematik in Physik

Die Zusammenstellung der Literatur orientiert sich an den in 1.3 angegebenen Problembereichen Inhalt, Notation, Kontext und Verfügung.

A Inhaltsproblem

ÜberAnalysen mathematischer Inhalte des Physikunterrichts und deren Vergleich mit dem Vorgehen im Mathematikunterricht wird in der Literatur nur selten berichtet. Sie beziehen sich weitgehend auf logische Analysen von Lehrbüchern und Lehrplänen nach relativ groben Merkmalskategorien und reflektieren in keiner Weise die mangelnde Generalisierungsfähigkeit vieler Schüler, die nur empirisch zu bestimmen ist.

a) Logische Analysen zum Inhaltsproblem (Koordinierungsproblem)
LENNÉ (1969, S. 261) bemerkt hierzu:

> "In der Traditionellen Mathematik kommen die linearen Funktionen (in Klasse 7 oder 8), die quadratischen und einfache inverse Funktionen (in Klasse 8),..., für den Physikunterricht sehr oft zu spät."

Man kann hinzufügen, daß auch in den neuen Lehrplänen (s. z.B. Hessische Rahmenrichtlinien Mathematik (HRRM), Sekundarstufe I, 1972) diese Problematik weitgehend vorhanden ist, auch wenn in der 7. Klasse verstärkt auf die Belange der Physik eingegangen wird (s. HRRM, 1972, Kap. 13: Zuordnung zwischen Größenbereichen)[1]. Im Physikunterricht wird dies insoweit

berücksichtigt, als man z.B. in Optik (Mittelstufe) versucht, ohne trigonometrische Funktionen auszukommen. Dieser Verzicht auf abstrakt mathematische Methoden, für die kein Bezug zur Alltagserfahrung der Schüler herzustellen ist, ist m.E. für die Grundschule und beginnende Sekundarstufe I positiv zu beurteilen, da hier kaum mathematische Voraussetzungen aus dem Mathematikunterricht angenommen werden dürfen.
Für die Mittel- und Oberstufe wird aber von RANG et al. (1974) auch dort eine Vermeidung komplexerer Mathematikinhalte festgestellt, wo Koordinierungsprobleme nicht mehr in größerem Ausmaß zu berücksichtigen sind. Zu ähnlichen Schlußfolgerungen kommen auch andere Autoren, die sowohl für Schule als auch physikalische Anfängerveranstaltungen als deren mathematische Grundlage die traditionellen Mathematikinhalte der Mittel- und beginnenden Oberstufe herausstellten (z.B. OERLEIN, 1937; CAIN/LEE, 1963; BOECK,1972; GEORGE, 1974; NÄGERL, 1975).

b) Empirische Untersuchungen zum Inhaltsproblem (Generalisierungsproblem)
Ernste Schwierigkeiten ergeben sich für den Physikunterricht besonders dort, wo entsprechende mathematische Inhalte aufgrund der Lehrziele im Mathematikunterricht als bekannt vorausgesetzt werden. Durch die Annahme einer m.E. nicht berechtigten weitreichenden Generalisierungsfähigkeit des Schülers wird häufig übersehen, daß auch bei den scheinbar gelernten mathematischen Verfahren Inhaltsprobeleme auftreten (z.B. bei Maßstabsfragen, Bereichsfragen, Idealisierungen von Meßwerttabellen), die durch die restriktive Atmosphäre des Mathematikunterrichts bedingt werden. Restriktiv insofern, als der Mathematikunterricht seine Demonstrations- und Übungsbeispiele willkürlich erzeugen und somit viele Probleme in Anwendungssituationen umgehen kann. Der häufige Versuch vieler Physikbücher (s. Kap. 3), in ähnlicher Manier physikalische Ergebnisse darzustellen, um somit unter Umgehung der Probleme physikalischer Idealisierung direkt den Anschluß an die mathematischen Funktionen zu finden, stellt m.E. eine unzulässige

Scheinlösung dieses Problems dar. Der hiermit angesprochene psychologische Aspekt der Generalisierbarkeit mathematischer Kenntnisse (siehe hierzu auch Ähnlichkeitsproblematik in der Transferforschung, Abschnitt 2.1) läßt sich nur empirisch untersuchen. Obwohl die Zahl der Untersuchungen hierzu sehr gering ist, erstaunt immer wieder, von welch speziellen Aufgabenmerkmalen das Lösungsverhalten von Schülern und Studenten beeinflußt wird, oder mit anderen Worten, wie gering die Generalisierungsfähigkeit ist.
Die nun folgende verkürzte Wiedergabe der empirischen Untersuchungen bezieht sich auf die Kategorien:
Fragestellung, Versuchspersonen (Vpn), Gegenstand, Art der Behandlung (falls angegeben), Erfassung wichtiger Variablen für Parallelisierung und Behandlungseffekte (Test), wichtige Ergebnisse und Anmerkungen zu den Ergebnissen. Falls Untersuchungen Beiträge zu verschiedenen Problemen liefern, werden sie aus Übersichtlichkeit mehrfach aufgeführt. Zur Veranschaulichung der Testaufgaben werden in Anmerkungen einzelne Beispiele erwähnt.

ZERBST/NÄGERL (1973):
Fragestellung: Welchen Einfluß haben formale Aufgabenmerkmale auf die Lösung mathematischer Aufgaben?
Vpn: 1300 Studienanfänger Medizin und anderer Fachrichtungen.
Gegenstand: Lineare Funktionen.
Test[2]: Bestimmung von Geradengleichungen, wobei folgende Aufgabenmerkmale variiert wurden: Zahl der Rasterpunkte, durch die die Gerade verläuft (2,1,0); Maßstabsfaktor; Notation.
Ergebnis: Zahl der Rasterpunkte (Interpolation) und nichttrivialer Maßstab reduziert Lösungswahrscheinlichkeit von 0.67 auf 0.4 .

HÄUSSLER (1976):
Fragestellung: Ist Lösungsverhalten von Aufgaben zur Bestimmung funktionaler Beziehungen durch eine einzige Disposition im Sinne des RASCH-Modells bestimmt?
Vpn: 356 Schüler der 7. - 10. Klasse. Gegenstand: lineare, inverse, quadratische und invers quadratische Funktionen.
Test[3]: Verbale Darstellungen, Voraussage von Funktionswerten, Berechnung der Proportionalitätskonst. zu gegebener Wertetab.mit Variation des Kontexts (mathematischer/physikalischer Kontext).
Ergebnis: Lösungsverhalten läßt sich aufgrund angenommener

neun Operationen über Denktätigkeiten, die sich auf bestimmte Funktionstypen und Aufgabentyp (Rechenaufgaben, Beschreibung) und neun Kontextmerkmale beziehen, ausreichend vorhersagen. Erhebliche Schwierigkeiten mit verbalen Darstellungen wurden festgestellt.
Anmerkung: Der Auffassung des Autors, daß seine Testaufgaben sich auf typisches Vorgehen im Physikunterricht beziehen würden, muß widersprochen werden, da hier ausschließlich aufgrund von Wertetabellen funktionale Beziehungen erkannt werden müssen.

RIBAN (1971):
Fragestellung: Lassen sich mathematische Inhaltsprobleme im Physikunterricht erkennen und gezielt beseitigen?
Vpn: 30 Schüler 11. und 12. Klasse. Gegenstand: PSSC-Optik-Physikkurs. Behandlung: Gruppe A erhielt aufgrund logischer Analyse der physikalischen Aufgaben des Zwischentests bei fehlerhafter Bearbeitung gezielte mathematische Unterstützung; Gruppe B löste in dieser Zeit weitere physikalische Aufgaben.
Test: Pretest, Zwischentest, Nachtest Physik.
Ergebnis: Keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen. Der geringe Effekt der mathematischen Unterstützung wird von RIBAN wie folgt begründet:

1) Versagen in Physikaufgaben war nur in 44% der Fälle auf fehlende mathematische Kenntnisse zurückzuführen
2) Zahl der Unterstützungen in Mathematik bezog sich nur auf 14% aller bearbeiteten Aufgaben
3) In Gruppe B bewirkt die Lösung der physikalischen Übungsaufgaben einen ähnlichen Lerneffekt, wie die zusätzliche Unterstützung in Mathematik.

Anmerkung: Die Untersuchung scheiterte m.E. an der unzureichenden Berücksichtigung hierarchischer Strukturen in Physikaufgaben. Strukturelle Testverfahren zur eindeutigen Analyse von Defiziten über eine Ergebnisanalyse der Aufgaben verlangen eine weitgehend vollständige Erfassung aller am Lösungsprozeß beteiligten Operationen. In obigem Fall wäre die Zuweisung der mathematischen Unterstützung aufgrund der Ergebnisse in Physikaufgaben nur dann effektiv, wenn diese

mathematischen Inhalte die Varianz in den Ergebnissen bewirkt hätten. Da es sich aber hier weitgehend um Physiklernen handelte, ist diese Annahme unberechtigt.

Auch Untersuchungen von JERMAN/MIRMAN (1974), SEAREL (1974) und KRÖPELIN (1966) weisen auf eine Abhängigkeit des Lösungsverhaltens mathematischer Aufgaben von vielfältigen, strukturellen Variablen hin, so daß Erwartungen über eine große Generalisierungsfähigkeit mathematischer Inhalte m.E. nicht berechtigt erscheinen.

B Notationsproblem

Allgemein wird von vielen Autoren darauf hingewiesen, daß schon bloße Veränderungen der Notation (Variablenbezeichnung) den Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe erheblich vergrößern (s. z.B. THORNDIKE (1922), HALL (1951), SWARTZ (1973), VAN HIELE (1974)). Deshalb wird in der Denkschrift zum Mathematikunterricht (BAUER, 1976, S. 7) mit Nachdruck gefordert:

> "Solche Gleichungen (gemeint: lineare Gleichunge mit mehreren Unbekannten) müssen auch dann noch sicher und bis zum numerischen Endresultat bearbeitet werden können, wenn die Variablen einmal s und t statt x und y heißen oder wenn dimensionierte Größen vorkommen."

Zum Notationsproblem ist mir nur die oben beschriebene empirische Untersuchung von ZERBST/NÄGERL (1973) bekannt:
Fragestellung: welchen Einfluß haben formale Aufgabenmerkmale auf die Lösung mathematischer Aufgaben?
Vpn: 1300 Studienanfänger Medizin und anderer Fachrichtungen.
Gegenstand: lineare Funktionen.
Test[2]: Bestimmung von Geradengleichungen, wobei folgende Aufgabenmerkmale variiert wurden: Zahl der Rasterpunkte, durch die die Gerade verläuft (2,1,0); Maßstabsfaktor; Notation.
Ergebnis: Bei Übergang von x-y-Notation zu ξ-η Notation ändert sich der Prozentsatz mathematisch richtiger Lösungen nicht (40%). Allerdings sind 15% der Vpn nicht in der Lage, die veränderte Notation zu berücksichtigen. Bei physikalischer Notation fällt der Prozentsatz mathematisch richtiger Lösungen auf 25% ab, wobei nur 5% ihr Ergebnis in physikalischer Notation wiedergeben konnten.

C Kontextproblem

Systematische Untersuchungen zum Einfluß des Kontexts auf die Anwendung mathematischer Operationen sind ebenfalls sehr selten.

KRÖPELIN (1966):

Fragestellung: Die Rolle des Vorstellungsgehalts einer Textaufgabe auf das Lösungsverhalten

Vpn: 136 Schüler, 4. Klasse. Gegenstand: Textaufgaben zur Schlußrechnung.

Test: ähnliche Aufgaben mit Variation des Kontexts: a.vertrauter Bereich; b. bekannter Bereich; c. Phantasiebereich.

Ergebnis: Die Lösungsprozente für Kontext b. und c. sind um etwa 25% geringer als für vertrauten Kontext a. (44%).

HÄUSSLER (1976):

Fragestellung: Ist Lösungsverhalten von Aufgaben zur Bestimmung funktionaler Beziehungen durch eine einzige Disposition im Sinne des RASCH-Modells bestimmt?

Vpn: 356 Schüler der 7. - 10. Klasse. Gegenstand: lineare, inverse, quadratische, invers quadratische Funktionen.

Test[3]: Verbale Darstellungen, Voraussage von Funktionswerten, Berechnung der Steigung zu vorgegebenen Wertetabellen mit Variation des Kontextes (mathematischer/physikalischer Kontext).

Ergebnis: Der physikalische Kontext kann durch Assoziationen den Lösungsprozeß unterstützen oder erschweren. Die unterstützende Funktion ergibt sich nur dort, wo das geforderte Antwortverhalten auf vertrauten Zusammenhängen aufbaut.

Anmerkung: Ähnliche Ergebnisse wurden auch in Voruntersuchungen zur vorliegenden Arbeit festgestellt. Bei Aufgaben zur Vektorsumme und Projektion kann physikalischer Kontext sowohl förderlich als auch hinderlich sein (z.B. wird Operation "Projektion" durch Bezug auf zwei Kräftepfeile erschwert, da dieser Kontext Hinweis auf "Vektorsumme" bewirkt).

D Verfügungsproblem

In vielen Artikeln wird als wesentliche Ursache für mathematische Schwierigkeiten im Physikunterricht die mangelnde Verfügung über traditionelle Mathematik angegeben. So schreibt schon OERLEIN (1937, S.126):

> "There is sufficient evidence to show that students are receiving credit for mathematics which they have not mastered sufficiently for use in situations demanding it."

Noch deutlicher drückt dies GEORGE (1974, S.350) aus, ohne sich aber auf eigene Untersuchungen beziehen zu können:

> "The most important items requested in the survey (gemeint ist Physikanfängerkurs, Universität) were the comments regarding the students background in mathematics... The author... has found that most of the students who either drop the course or complete with a poor final grade had difficulties in solving problems using basic high school mathematics."

Inzwischen wird dieser Sachverhalt auch von den Mathematikern gesehen. So heißt es in der Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien (BAUER, 1976, S.1):

> "Die deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV) weist hiermit öffentlich auf die unzulängliche mathematische Vorbildung der meisten Studienanfänger hin."

Diese Aussage wird durch empirische Untersuchungen von GIESE (1974), HEISE/MITTNER (1975), ZERBST/NÄGERL (1975), DAHNKE (1975) an deutschen Studenten (speziell bei Anfängern des Medizinstudiums) weitgehend bestätigt.
In der amerikanischen Literatur wird über ähnliche Probleme berichtet:
PARQUE (1966), KLEIN (1973), SWARTZ (1973), RIBAN (1971), BOECK (1972).
Obwohl diese Untersuchungen sich hauptsächlich auf Studenten beziehen, wird auch für die Schule mit ähnlichen Schwierigkeiten gerechnet. Informelle Gespräche mit vielen Mathematiklehrern, aber auch eigene Untersuchungen zu mathematischen Vorkenntnissen in 8. und 9. Klassen unterstützen diese Hypothese (s. 7.2).

Inwieweit diese Verfügungsprobleme auf die Einführung der Neuen Mathematik zurückzuführen sind, läßt sich empirisch nicht verifizieren. In einer Zusammenfassung der Untersuchungen über Unterschiede zwischen Traditioneller und Neuer Mathematik (Report of the SMSG Panel on Research, 1972) heißt es:

> "In most of the studies the number of subjects is too small to encourage generalizations. Almost never is it possible to compare two of these studies, since they use different treatments, different instruments and different kinds of subjects."

Dagegen berichtet SCHWALBE (1972), daß in Schweden bei Eingangstests an naturwissenschaftlichen Fakultäten eine durchschnittliche Leistungsminderung um 25% bei in Neuer Mathematik unterrichteten Studenten festgestellt wurde.

Untersuchungen über den Zusammenhang von Verfügungsproblemen in Mathematik mit Physik sind mir in der BRD auf Schulniveau unbekannt. Über Studienanfänger in Medizin berichten NÄGERL/HEIDENREICH (1975):

Fragestellung: Analyse von Prediktoren für den Erfolg im physikalischen Anfängerpraktikum.

Vpn: 150 Medizinstudenten. Gegenstand: Physikpraktikum.

Methode: Faktoranalytische Untersuchung des Praktikumserfolgs. Test: Vorkenntnis in Mathematik und Physik, intellektuelle Leistungsfähigkeit, Motivation; 3 Physikklausurtests.

Ergebnis: Das Klausurergebnis wird weitgehend durch die Mathematik- und Physikvorkenntnisse bestimmt, wobei die Korrelation zwischen Klausurerfolg und Mathematikvorkenntnis bei $r = 0.65$ liegt.

Anmerkung: Eine Analyse der mathematischen Anforderungen des Praktikums ergab mathematischen Schulstoff, der bis zum Beginn der Oberstufe vorhanden sein sollte.

Weitere Untersuchungen zu diesem Komplex findet man in der amerikanischen Literatur:

BOLTE (1966)

Fragestellung: Prediktoren für den Erfolg in einem Physikanfängerkurs. Vpn: 1235 Studenten verschiedener Fachrichtungen (1. Semester). Gegenstand: Physikkurs in Mechanik, Wärmetheorie, Akustik, Elektrizitätslehre, Optik, Atom/Kernphysik.

Variable/Test: Stundenzahl in Schulmathematik, High School-

Abschlußnoten, Stundenzahl in Mathematikkursen an der Universität; Kriterium war Note am Ende des 1. Semesters aufgrund von Zwischenklausuren.
Ergebnis: 5 signifikante Prediktoren für Physikerfolg, wobei die Physiknote und der Notendurchschnitt (allgemeine Leistungsfähigkeit) im Schulabschluß die größte Bedeutung haben. Positiv, aber sehr gering korreliert noch die Teilnahme am universitären Kalkülkurs (r = 0.1). BOLTE erklärt die geringe Bedeutung der Schulmathematik für Physikerfolg aus der Tatsache, daß Tests stärker die Analyse schriftlicher Probleme und die Aufstellung von Gleichungen verlangte, als die Operationen mit Gleichungen. Diese Fähigkeiten werden aber im Mathematikunterricht nicht geübt (S.77).

ABELES (1966)
Fragestellung: Anwendung mathematischer Kenntnisse auf Physik.
Vpn: 700 Schüler. Gegenstand: Funktionen, Vektoralgebra, Interpretation von Graphen, Gleichungen. Test: Physiktest mit und ohne Angabe der benötigten Formeln, Mathematiktest zur Überprüfung mathematischer Voraussetzungen.
Ergebnis: Signifikante Korrelation zwischen Mathematik- und Physiktest (ohne Angabe des Korrelationskoeffizienten). Es wurden erhöhte Schwierigkeiten mit Interpretationen von Graphen und inversen quadratischen Funktionen festgestellt.

DENNY (1970):
Fragestellung: Beziehung zwischen Mathematik und Chemieerfolg.
Vpn: 242 Schüler. Gegenstand: Chemie. Test: Eigener Mathematiktest, der Verständnis mathematischer Begriffe und Methoden abprüft; ACS-NSTA High School Chemistry Testbatterie.
Ergebnis: Korrelation zwischen Mathematik und Testteilen Chemie zwischen r = 0.63 und r = 0.82 .

FLETCHER (1971):
Fragestellung: Prediktoren für Erfolg in einem Physikprojekt.
Vpn: 207 Schüler der 10. - 12. Klasse.
Gegenstand: Physikkurs. Test: Physiktest, Mathematik-Test Algebra I und II; projektbezogener Physik-Nachtest.
Ergebnis: Mathematik- und Physiktest erklären 55% der Varianz des Nachtests.

Die eigentliche Frage, inwieweit mathematische Kenntnisse

physikalische Begriffsbildung erleichtert, läßt sich durch obige Untersuchungen kaum beantworten. Hierfür wären Untersuchungen im Sinne SPERO (1974) notwendig, die sich auf allgemeinere Intelligenzstrukturmodelle(GUILFORD) oder analytische Fähigkeiten (RAVEN-Test; PIAGET'sche Aufgaben) als Hintergrundvariable beziehen. SPERO kommt bei seiner Untersuchung über den Zusammenhang von Testleistungen in einem PSSC-Kurs mit solchen Variablen zu folgenden Prediktoren:

1. evaluation of semantic relations
2. cognition of semantic implications
3. evaluation of semantic implications
4. convergent production of symbolic systems
5. divergent production of symbolic relations
6. memory of semantic classes

In der Beziehung dieser oder ähnlich allgemeineren Faktoren zu Mathematikkenntnissen könnte ein wesentlicher Teil der Bedeutung der mathematischen Leistungen für das Physiklernen liegen.

Es verbleibt dann aber auch weiterhin das Verfügungsproblem über spezielle mathematische Kenntnisse, wie sie in konkreten physikalischen Situationen anzuwenden sind. Unter der Annahme aber, daß der Physikunterricht an Schule und Hochschule sehr stark auf Traditioneller Mathematik aufbaut (s. Abschnitt 1.1 und 3.2), lassen Untersuchungen zum Verfügungsproblem eine zentrale Schwierigkeit für den Physikunterricht durch mangelnde Mathematikkentnisse erwarten.

Eine Versserung dieser Situation wird in folgenden Richtungen angestrebt:

1) Eine Effektivitätssteigerung des Mathematikunterrichts bezüglich traditioneller Inhalte (s. FREUDENTHAL (1968), BAUER (1976)).
2) Vermittlung der fehlenden Kenntnisse in der Physikausbildung (s. hierzu Entwicklung an Universitäten bei DAHNCKE(1975), NÄGERL (1975), WELTNER (1972); Entwicklung integrierter Kurse im Sinne des Minnesota Mathematics and Science Teaching Projects).
3) Vermeidung von Mathematik in Physik, so weit wie möglich (s. OREAR (1961), WAGENSCHEIN (1962) ROGERS (1960), MARCUS (1952)).

Da noch weitgehend unklar ist, wieviel Mathematik im Physikunterricht sinnvoll ist und welches Fach diese Inhalte ver-

mitteln soll, werden zur Zeit alle drei Richtungen vertreten. Da m.E. die typische Arbeitsweise in Physik sich auf quantitative Erfassung von Phänomenen bezieht (s. Kap. 1.1) und auch aus lernpsychologischen Gründen die Einfachheit mathematischer Darstellungen in vielen Fällen umgangssprachlichen Beschreibungen vorzuziehen sind, läßt sich ein bestimmtes mathematisches Niveau nicht vermeiden. Zur Vermeidung von Doppelgleisigkeit im Mathematik- und Physikunterricht sollte m.E. erst einmal ausführlicher untersucht werden, welche Veränderungen im Rahmen des Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung dessen eigenständiger Zielsetzung möglich sind. Über einige Untersuchungen hierzu soll kurz berichtet werden.

4.2 Untersuchung des Einflusses von Behandlungsunterschieden in Mathematik auf den Erfolg in Physik

KOLB (1967/68):
Fragestellung: Welchen Einfluß hat die Berücksichtigung mathematischer Inhalte des Physikunterrichts im Mathematikunterricht auf das Lernen von Physik?
Vpn: 11 Klassen 5. Schuljahr. Gegenstand: Reibungsphänomene.
Behandlung: Gruppe A wird unterrichtet nach physikorientiertem Mathematikprogramm, aber ohne physikalische Beispiele; Gruppe B wird unterrichtet nach normalem Mathematikprogramm.
Test: Mathematiktest, Physiktest.
Ergebnis: Mittelwert für Mathematiktest: Gruppe A = 21.3, Gruppe B = 13.3; für Physiktest: Gruppe A = 8.3, Gruppe B = 6.6. Unterschiede sind signifikant für p = 0.1 für beide Tests zugunsten der A-Gruppe.
Anmerkung: Unter der Voraussetzung, daß diese Ergebnisse nicht auf einen Versuchsleitereffekt zurückzuführen sind, erscheint durch bloße Berücksichtigung des Inhaltsproblems eine Effektivitätsssteigerung des Mathematikunterrichs für Physik möglich, auch wenn die Unterschiede im Physiktest gering sind.

Ein anderer Weg zur Verbesserung der Situation wurde von MAYER/GREENO (1972) untersucht:
Fragestellung: Feststellung struktureller Behandlungsunterschiede für zwei Arten von Lehrsequenzen. Vpn: 20 Psychologiestudentinnen. Gegenstand: Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Behandlung: Genetisch vorgehendes Lehrprogramm, das auf Vorerfahrungen aufbaut (Gruppe A); deduktiver Lehrgang, der mit Angabe der Formel und Definition von Wahrscheinlichkeit beginnt (Gruppe B).
Test[4]: 4 Aufgabentypen: den Übungen ähnliche Aufgaben, Umformungsaufgaben, nicht beantwortbare Aufgaben, Verständnisfragen.
Ergebnis: Überlegenheit der Gruppe B bei ähnlichen und Umformungsaufgaben (~ 20%); Überlegenheit der Gruppe A bei den übrigen Aufgabentypen (~ 30%). Die strukturellen Unterschiede der Behandlung werden wie folgt interpretiert: In Gruppe A wird Bedeutung der Konzepte durch Beziehungen zu vertrauten Konzepten betont, was die Lösung nichtalgorithmischer Aufgaben begünstigt. In Gruppe B dagegen werden mathematische Beziehungen betont, so daß Operationen stärker gelernt werden, was sich für algorithmisch lösbare Aufgaben positiv auswirkt.

Wesentlich stärker auf Physik ausgerichtet ist eine Untersuchung von COLLAGAN (1969):
Fragestellung: Vergleich eines Mathematikkurses, der die physikalischen Anwendungen betonte, mit einem konventionellen Mathematikkurs bezüglich Lernerfolg in Mathematik und Physik.
Vpn: 144 Studenten. Gegenstand: Arithmetik, Algebra, Geometrie, Logarithmus, Trigonometrie, Messungen und graphische Analysen. Behandlung: Gruppe A lernte nach integriertem Lehrprogramm; Gruppe B nach Standardtext "Basic Mathematics for the Physical Science". Test: Vortest Mathematik für Parallelisierung, 4 Mathematikklausuren, Nachtest Mathematik, Astronomietest.
Ergebnis: Im Mathematiktest Mittelwert Gruppe A: 40,8, Gruppe B 36,5 ($p < 0.01$); in Astronomie Gruppe A: 9,7 , Gruppe B: 8,4 ($p < 0.01$).
Im zweiten Semester wurden Gruppe A und B in Physik unterrichtet und Auswirkungen der vorangegangenen Mathematikbehandlung auf Physiklernen untersucht.
Vpn: 122 . Gegenstand: Physik. Behandlung: Konventioneller Physikunterricht für beide Gruppen. Test: Vortest Physik zur Parallelisierung, Nachtest Physik.
Ergebnis: Mittelwert Physiktest Gruppe A: 22,3, Gruppe B:19,8 ($p < 0.05$).
Anmerkung: Auch wenn die Unterschiede zwischen den Gruppen sowohl in Mathematik als auch in Physik nicht sehr groß sind, wurde hiermit gezeigt, daß vorausgegangener Mathematikunterricht eine Wirkung auf späteres Physiklernen haben kann. In ähnlicher Richtung weisen auch Untersuchungen von DAVIDSON (1968).

Eine letzte Untersuchung bezieht sich auf die Integration mathematischer Methoden in den Physikunterricht, über die REDFIELD/ATWOOD (1966) berichten:
Fragestellung: Kann Schülern durch forschenden Unterricht die quantitative Beschreibung und Interpretation von Experimenten so beigebracht werden, daß sie diese auf andere Situationen übertragen können?
Vpn: 262 Schüler der 7. - 9. Klasse. Behandlung: Gruppe A lernt, physikalische Fragen zu entwickeln, Versuchspläne zu entwerfen und zu realisieren, Darstellung von Wertetabellen und Bestimmung linearer Gleichungen. Gruppe B erhielt keinen Unterricht über diese Inhalte. Test: Faktentest Physik, Methodentest Physik.
Ergebnis: Gruppe A löste im Mittel Faktentest mit 52%, Methoden-

test mit 64%, Gruppe B entsprechend 16%/32%. Signifikante Korrelationen zwischen Lesefähigkeit und Faktentest (r~0.5), zwischen Mathematikvorkenntnis, nicht verbaler Intelligenz und Methodentest (beide r~0.5). Besondere Schwierigkeiten traten bei Aufgaben zur Entwicklung physikalischer Problemstellungen und Bestimmung von linearen Gleichungen auf (Lösungsprozente ~ 50%). Dabei bezieht sich die Hauptschwierigkeit der Anwendung mathematischer Methoden auf: Steigung (Lösungsprozente~ 25%), Gleichung angeben (~ 21%), Bereichsangabe (~ 6%), Interpolation und Extrapolation. Eine Altersabhängigkeit der Ergebnisse konnte nicht festgestellt werden.

Versucht man, die Ergebnisse unter dem Gesichtspunkt ihrer Bedeutung für den Physikunterricht entsprechend dem Klassifikationsschema zur Anwendungsproblematik zusammenzufassen, so lassen sich folgende Schlüsse ziehen:

1) Zum Inhaltsproblem: Der Physikunterricht ist bis zur 7. Klasse mit erheblichen Koordinierungsproblemen zwischen Mathematik und Physik belastet. Weitere Schwierigkeiten ergeben sich aus den Inhalten, die schon in Mathematik behandelt wurden (ZERBST/NÄGERL, 1975; PARQUE, 1966). Z.T. wird dies auf die Eingeschränktheit der Beispiele des Mathematikunterrichts zurückführt, die durch ihre Konstruierbarkeit spezielle Probleme in Anwendungssituationen umgehen können. Durch Berücksichtigung dieser zusätzlichen Inhalte im Mathematikunterricht läßt sich das Inhaltsproblem teilweise beseitigen (KOLB, 1967/68).

2) Zum Notationsproblem: Die einzige Untersuchung zum Einfluß der Notation auf die Anwendung mathemtischer Operationen hat gezeigt, daß beim Übergang zu Variablen mit connotativer Bedeutung die Aufgabenschwierigkeit zunimmt (ZERBST/NÄGERL (1975)). Allerdings wird hierdurch nur ein Teil der Schwierigkeiten erfaßt, die durch die x-y-Notation für Anwendungssituationen entstehen (siehe Kap. 2). Eine Vermeidung dieser Probleme setzt notwendigerweise entweder den Verzicht auf eine einheitliche Notation im Mathematikunterricht voraus, wie es bei integrierten Programmen praktiziert wird, oder eine zusätzliche Übung von Transformationsregeln im Rahmen des Mathematik- oder Physikunterricht.

3) Zum Kontextproblem: Die verschiedenen Untersuchungen ergaben, daß der Einfluß des Kontextes sich auf die Anwendung mathematischer Aufgaben sowohl positiv als auch negativ auswirken kann. Positive Wirkungen treten dann ein, wenn der Kontext an vertrauten Situationen anknüpft, die wegen ihrer Anschaulichkeit das Durchspielen von abstrakten Lösungsmethoden erlauben oder einen starken Hinweisreiz für die anzuwendende Operation geben (KRÖPELIN, 1966). Dagegen wirkt sich Kontext nachteilig aus, wenn er von der Aufgabenstellung ablenkt. Z.B. dadurch, daß der Kontext bestimmte Operationen aufruft, die im Widerspruch zu den anzuwendenden Operationen stehen (HÄUSSLER, 1976). Spezielle Untersuchungen zur Überwindung dieser Probleme liegen nicht vor.

4) Zum Verfügungsproblem: In fast allen Untersuchungen zum Zusammenhang von Mathematik und Physik wird auf die mangelnde Verfügung von im Mathematikunterricht gelernten Inhalten in mathematischen Aufgabensituationen hingewiesen. Inwieweit die Annahme von Verfügungsproblemen berechtigt ist, kann den jeweiligen Untersuchungen nicht entnommen werden. Hierfür hätte gezeigt werden müssen, daß die untersuchten Schüler und Studenten mit entsprechenden Defiziten zu irgendeiner Zeit diese Inhalte beherrscht haben. Diese Analyse von langzeitlichen Behaltensproblemen wäre sehr aufschlußreich, ist aber organisatorisch und methodisch schwer durchführbar.

5) Zum Zusammenhang von Mathematikkenntnissen mit Physiklernen: In verschiedenen Untersuchungen wurde ein Zusammenhang zwischen Mathematikkenntnissen und Physiklernen statistisch nachgewiesen (NÄGERL/HEIDENREICH, 1975; FLETCHER, 1971). Untersuchungen von BOLTE(1966) zeigen allerdings die Begrenztheit dieser Zusammenhänge, die wesentlich von den mathematischen Inhalten der Physikbehandlung/Physiktest bestimmt werden. Da die verwendeten Versuchspläne keine Aussage über die Richtung des Zusammenhangs und die Bedeutung der Mathematik für die physikalische Begriffsbildung zulassen, bleibt diese Frage auch weiterhin offen.

6) Zum Zusammenhang von Mathematikbehandlung mit Physiklernen: Untersuchungen von COLLAGAN(1969) und KOLB(1967/68) weisen darauf hin, daß eine Behandlung im Mathematikunterricht, die sich inhaltlich mehr oder weniger auf die Problemtypen im Physikunterricht bezieht, das gleichzeitige oder spätere Lernen von Physik begünstigt. Untersuchungen von MAYER/GREENO(1972) lassen aber erkennen, daß die Betonung fachübergreifender Beispiele in der Lernsituation die Anwendung mathematischer Operationen auf algorithmisch lösbare Aufgaben erschweren kann.

Für die vorliegende Untersuchung lieferten die oben mitgeteilten Ergebnisse viele Hinweise auf mögliche Anwendungsprobleme. Nur selten kann man ihnen aber eine differenzierte Beschreibung für einzelne Schwierigkeiten im begründbaren Zusammenhang mit der Lernphase entnehmen. Weiterhin fällt der geringe Bezug der Untersuchungen zu lernpsychologischen Theorien auf. Dort,wo theoretische Konzepte in die Untersuchung und deren Interpretation eingingen (z.B. GAGNÈ Hierarchiekonzept oder AUSUBELs Konzept der 'Kognitiven Struktur'), handelt es sich entweder um triviale Bezugnahmen oder um relativ willkürliche, spekulative Begründungen von Ergebnissen mit sehr allgemeinen Konstrukten (s. hierzu Kritik von SEILER, 1973, S.17 am Konstrukt 'Kognitive Struktur'). Dies ist kein Vorwurf gegenüber den Untersuchungen, sondern kennzeichnet lediglich den Stand lernpsychologischer Theorien, die im Gegensatz zur Physik keine detaillierten Vorhersagen von Ereignissen in konkreten Situationen erlauben.

Fraglich bleibt allerdings, ob diese Unkenntnis über den Zusammenhang von Lernphase und Lernergebnis durch statistische Analysen von Testergebnissen beseitigt werden kann, da aus den Testergebnissen keine eindeutigen Rückschlüsse auf den Lösungsprozeß selbst gezogen werden können. In diesem Zusammenhang muß man ebenfalls auf die zunehmende Kritik an der Angemessenheit der Anwendung statistischer Verfahren in der psychologischen Forschung hinweisen. So stellt KILPATRICK (1969, S. 531) fest:

> "Unfortunately, the increasing complexity of design has been accompanied by an increasing number of methodological blunders, such as the inappropriate use of analysis of covariance..." und weiter "More disturbing still is the investigators' apparent ignorance that statistical assumptions are being violated."

Welche statistischen Verfahren in der psychologischen Forschung als angemessen anzusehen sind, darüber herrscht zur Zeit immer noch eine große Unsicherheit (s. hierzu z.B. HENKEL/ MORRISON, 1970; ORTH, 1974).

Die bisherigen Ausführungen sollten den logischen und empirischen Zusammenhang zwischen Mathematik und Physik in der Ausbildung als Hintergrund der vorliegenden Arbeit umreißen. Im folgenden wird versucht, auf Möglichkeiten der Beschreibung von Anwendungsproblemen im Rahmen von Transfertheorien einzugehen. Ziel dieser Überlegungen ist es, die vorliegende Arbeit in den Zusammenhang einer umfassenderen Forschungsstrategie zur Untersuchung und Überwindung von Schwierigkeiten der Übertragung mathematischer Inhalte auf Anwendungssituationen zu stellen.

[illegible] Die Anwendungsproblematik als Transferproblem

Die oben aufgeführten empirischen Untersuchungen haben gezeigt, daß die Anwendung mathematischer Methoden durch geringe Änderungen zwischen Lern- und Aufgabensituation empfindlich gestört wird (s. z.B. ZERBST/NÄGERL (1975), THORNDIKE (1922)). Die Transferforschung versucht nun, die für diese Störung der Übertragbarkeit relevanten Situations- und Persönlichkeitsvariablen zu bestimmen, um hierdurch ein effizienteres, d.h. bereichsunspezifischeres und dauerhafteres Lernen zu ermöglichen. Die zentrale Bedeutung dieser Forschung für den pädagogischen Bereich ist offensichtlich, da schulisches Lernen kein Selbstzweck sein kann, sondern als Vorbereitung auf spätere Lebenssituationen verstanden werden muß. Ohne die Annahme von Transfer würden auch die verschiedenen didaktischen Positionen (wie z.B. "kategoriale", "exemplarische" Bildung bei KLAFKI, WAGENSCHEIN) sinnlos werden. Trotz vieler Bemühungen sind aber die Bedingungen(Merkmale) von Lern- und Anwendungssituation (z.B. Lerngeschichte, Lehrmethode, Aufgabenmerkmale), die einen Transfer begünstigen, noch weitgehend ungekärt. Dies muß im engen Zusammenhang mit einer noch unzureichenden Operationalisierung des Ähnlichkeitsbegriffes gesehen werden, der eine zentrale Rolle für die Definition des Transferbegriffs spielt.

2.1 Begriff des Transfers

Wenn das Lernen oder Üben eines Inhalts zu einer Veränderung des Verhaltens in einer anderen Situation führt, spricht man von Transfer, auch Mitübung oder Übertragungslernen genannt.
Die Anwendung von im Mathematikunterricht gelernten, geübten Verfahren in physikalischen Aufgaben stellt somit ebenfalls ein Transferproblem dar. Allgemein wird Transfer definiert als "der Einfluß einer ersten Lerntätigkeit auf eine zweite verschiedene oder der durch diesen Einfluß bewirkte Unterschied im Resultat der zweiten Tätigkeit."(FLAMMER (1970, S.11))
Diese Definition ist aber sehr unbefriedigend, da hierdurch jedes Verhalten in einer bestimmten Situation durch Transfer mitbestimmt und damit keine eindeutige Abgrenzung gegen Üben, Lernen, Denken usw. möglich ist (s. FLAMMER, S. 11 - 13). Diese sehr allgemeine Definition führt vom üblichen Sprachgebrauch im Sinne eines "überraschenden" Transfers weg, unter dem die Übertragung von Lerninhalten auf deutlich verschiedene Situationen

verstanden wird. Es wurde deshalb versucht, einen "nichttrivialen Transfer" oder "Transfer im engeren Sinne" zu definieren (s. KLAUER (1970, S.34-35); FLAMMER (1970, S.14)). Allerdings sind auch diese Definitionen wenig überzeugend, da nicht einmal klar ist, welche Merkmalsdimensionen zur Beschreibung der Ähnlichkeit von Lern- und Übertragungssituationen zu berücksichtigen sind. Diese als Ähnlichkeitsproblematik (s. KLAUER (1970, S.29-33)) bekannte Schwierigkeit macht vorerst eine umfassende Transfertheorie unmöglich und damit eine eindeutige Erklärung und Vorhersage von Transferleistungen. Die von OSGOOD (1949) und anderen für einfachstes Lernmaterial (sinnlose Silben) entwickelten Modelle (wegen einer Übersicht siehe FLAMMER, S.63-105) basieren auf einer logischen Bestimmung von Ähnlichkeit (partielle Identität von Zeichen), deren psychometrischen Eigenschaften, speziell die Beziehung zur psychologischen Ähnlichkeit (Berücksichtigung des Lernerzustands), kaum untersucht wurden. Ohne die Berücksichtigung von über das Lernmaterial hinausgehenden Situations- und Persönlichkeitsvariablen ist aber eine Erklärung von Transfereffekten, wie sie in verschiedenen Untersuchungen nachgewiesen wurden (s. KLAUER (1969, S. 28), FREY/LANG (1972, S.38)) nicht mehr möglich. Deshalb hat sich in der lernpsychologischen Forschung die Tendenz einer persönlichkeitsbezogenen Lerntheorie wesentlich verstärkt (s. z.B. Konzept der "Kognitiven Struktur" bei AUSUBEL (1974), "Informationsverarbeitung" bei SCHRODER (1967); siehe hierzu eine zusammenfassende Darstellung bei SEILER (1973)). Damit wird ebenfalls für den naturwissenschaftlichen Unterricht die Priorität fachsystematischer Prinzipien zugunsten pädagogischer Überlegungen relativiert (s. FREY/LANG (1972, S. 28 und 38)).

Die Schwierigkeiten bei der Untersuchung von Transferphänomenen muß , wie schon festgestellt, im engen Zusammenhang mit der Definition des Transfers als Verhaltensänderung bezüglich zweier Situationen gesehen werden. Von dieser Definition ausgehend, müssen Transferuntersuchungen eine quantitative Bestimmung des Einflusses einer ersten Situation (Lernsituation) auf das Verhalten in einer nachfolgenden Situation (Anwendungssituation) leisten. Eine Übersicht über gebräuchliche Transferuntersuchungspläne findet man z.B. bei ELLIS (1965). Generell versucht man

hierbei, in einem Vorkenntnistest den Kenntnisstand zu bestimmen, führt dann die jeweils zu untersuchende Behandlung durch und versucht, im Nachtest die Lerneffekte festzustellen. Der Anstieg der Punktzahl vom Vortest zum Nachtest kann dabei als Hinweis auf den Umfang des Gelernten angesehen werden. Bei diesem Vorgehen ergeben sich eine Fülle methodischer Schwierigkeiten, von denen hier einige erwähnt werden sollen:

1) Die mangelnde Kontrolle der Versuchsbedingungen in Lernexperimenten verlangt zur Bestimmung des Einflusses einer Behandlung den Bezug auf eine Referenzgruppe (Kontrollgruppe). Diese Kontrollgruppe sollte in allen Merkmalen, die für den untersuchten Lerngegenstand relevant sind, mit der Behandlungsgruppe (Experimentalgruppe) übereinstimmen (Parallelstichprobenproblem). Unterschiede in den Nachtestergebnissen beider Gruppen sollten dann lediglich auf deren unterschiedliche Behandlung zurückzuführen sein. Durch die Hinzuziehung der Kontrollgruppe als Referenz für den Lerneffekt in der Experimentalgruppe werden alle Interpretationen auf die kontrastrierende Behandlung der Kontrollgruppe bezogen. Dadurch ergibt sich die Notwendigkeit, nicht nur für die Experimental-,sondern auch für die Kontrollgruppe definierte Behandlungspläne festzulegen. Man muß sehen, daß von der gewählten Kontrollbehandlung entscheidend der Unterschied zwischen den Gruppen und somit die Beurteilung der Behandlungseffekte abhängt.

2) Der Umfang des Gelernten hängt nicht nur von der eigentlichen Behandlung, sondern von allen Aktivitäten im Untersuchungszeitraum ab. So kann allein durch die Bearbeitung des Vortests schon ein erheblicher Lerneffekt auftreten, der sich mit dem zu untersuchenden Behandlungseffekt im Nachtest überlagert.

3) Zur Bestimmung von Behandlungseffekten wird über Lernzuwachsformeln(s. KLAUER, 1973, S.144) den Testwertdifferenzen aus Prä- und Posttest ein Lerngewinn zugeordnet. Neben der geringen Reliabilität von Differenzwerten treten bei diesem Lernmaß Verzerrungen bezüglich niedriger und hoher Prätestwerte auf, da keine Intervallskala[5] für dieses Lernmaß angenommen werden kann.

4) Transferpläne mit Experimental- und Kontrollgruppe laufen auf die Bestimmung von Unterschieden im Nachtestergebnis beider Gruppen hinaus. Als Entscheidungskriterium für Unterschiede werden statistische Prüftests herangezogen, wobei in der Regel sehr einschneidende Voraussetzungen bezüglich der Datenerhebung (z.B Zufallsstichprobe, Skalenniveau, Verteilung betreffend) erfüllt sein müssen. Für die meisten Untersuchungen lassen sich deshalb nur verteilungsfreie Testverfahren mit geringer Stärke verwenden(s. hierzu speziell SIEGEL, 1976, S. 19-33). Die Unempfindlichkeit der Prüfmethoden läßt nur relativ starke Behandlungseffekte statistisch absichern. Starke Effekte sind aber in der Regel auf offensichtliche Benachteiligung der Kontrollgruppe zurückzuführen (s. z.B. REDFIELD/ATWOOD (1966)).

Die zwei typischen Grundmuster von Transferuntersuchungsplänen, über die hier im Hinblick auf schulpsychologische Forschung nur in Verbindung mit pädagogisch vertretbarer Kontrollgruppenbehandlung[6] berichtet wird, sind als Retroaktions- und Proaktionsplan bekannt.

Retroaktionsplan:

Experimentalgruppe: Test A → Behandlung nach Programm B → Test A

Kontrollgruppe: Test A → Behandlung nach Programm C → Test A

Dieser Plan erfaßt die sich aus den Behandlungen B und C ergebenden Lerneffekte für Test A, der sowohl als Vor- wie auch als Nachtest benutzt wird. Dabei ergeben sich beim Retroaktionsplan oben erwähnte Schwierigkeiten durch Testwiederholung, die aber in beiden Gruppen ähnliche Lerneffekte bewirken sollte . Weiterhin ist der Vortest nur dann sinnvoll, wenn durch ihn die Parallelität der beiden Gruppen bezüglich relevant angesehener Variablen des Lernprozesses nachgewiesen werden kann. Zielt die Behandlung auf das Lernen neuer Inhalte ab, so wird der Vortest wegen der mangelnden Vorkenntnisse extrem schwer und nur schlecht differenzieren. Damit ist die Parallelität der Gruppen nicht mehr ausreichend überprüfbar. In diesem Fall muß man auf Proaktionspläne zurückgreifen.

Proaktionsplan:

Experimentalgruppe: Behandlung nach Programm B → Test A

Kontrollgruppe: Behandlung nach Programm C → Test A

Dieser Plan erfaßt die Auswirkungen eines Lernvorgangs auf eine spätere Leistung im Test A. Die notwendige Parallelisierung (Vergleichbarkeit) beider Gruppen erfolgt durch Erfassung von für den Lernprozeß als relevant angesehenen kognitiven und affektiven Variablen wie z.B. Schulnoten, Leseverständnis, Lerneinstellung. Schwierigkeiten bereitet dabei die Bestimmung relevanter Variablen, die sowohl im Bereich allgemeiner Leistungsvariablen als auch spezieller Kenntnisse in Bezug auf die zu bearbeitenden Lehrsequenzen zu suchen sind. Wir wissen noch wenig über relevante Variable für ein spezielles Unterrichtsverfahren, so daß die Auswahl der Parallelisierungskriterien weitgehend intuitiv erfolgen muß. Dadurch können die Untersuchungsergebnisse zumindest gegen den Einfluß dieser kontrollierten Variablen abgesichert werden.

Über diese einfachsten Versuchspläne hinaus gibt es eine Fülle komplizierterer Pläne zur simultanen Kontrolle differenzierterer Effekte, wie Versuchsleiter-, Klassen-, Prätesteffekte usw. (siehe hierzu KLAUER (1973)).

2.2 Anwendungsproblematik Mathematik in Physik als Transferproblem

Obwohl eine umfassende Theorie des Transfers noch aussteht, existieren eine Fülle empirischer Untersuchungsergebnisse, die eine Richtung erkennen lassen, in der ein bezüglich Behalten und Transfer effektiveres Lernen möglich erscheint. Im folgenden soll versucht werden, einige dieser vorläufigen Erkenntnisse der Lernpsychologie für die Anwendungsproblematik nutzbar zu machen.

Inhaltsproblem

Im allgemeinen werden mathematische Inhaltsprobleme des Physikunterrichts aufgrund relativ grober Analysen der Lehrpläne beider Fächer bestimmt. Dabei werden Inhaltsprobleme angenommen, wenn die in der Physik benutzten Operationen im Mathematikunterricht noch nicht behandelt worden waren.(z.B. für die Vek-

torrechnung, Trigonometrischen Funktionen in der 9. Klasse). Wesentlich schwerer zugänglich sind aber solche Inhaltsprobleme, die sich auf Detailfragen von schon im Mathematikunterricht behandelten Stoffen beziehen. ZERBST/NÄGERL (1975) haben gezeigt, daß selbst geringe formale Änderungen einer Aufgabenstellung gegenüber dem Vorgehen im Mathematikunterricht den Transfer von Lösungsalgorithmen erheblich stören. Die mangelnde Generalisierungsfähigkeit für die in Mathematik an einfachsten Beispielen gelernten Methoden muß sich für den Physikunterricht zu einem ernsten Problem auswachsen, wenn dort diese Erkenntnisse weitgehend ignoriert werden (s. Lehrbuchanalyse, Kap. 3). Eine Verbesserung dieses Zustandes im Physikunterricht verlangt:

1) Empirische Analysen über die Bereichsspezifität mathematischer Kenntnisse aufgrund der bisherigen Unterrichtspraxis im Sinne der Untersuchungen von ZERBST/NÄGERL (1975)

2) Unter der Annahme einer geringen Generalisierungsfähigkeit mathematischer Kenntnisse (in Anlehnung an Strategie von DÖRNER, 1972, S.89): Analyse mathematischer Anwendungssituationen; jahrgangsabhängige Auswahl von Situationen, für die der Mathematikunterricht vorbereiten will; Entwicklung von Lösungsstrategien, die für alle betrachteten Situationen eines Gebietes anwendbar und späterem Lernen nicht hinderlich sind[7]; Festlegung eines klar umrissenen Kenntnisniveaus für Mathematik, auf das sich der Physikunterricht beziehen kann (s. BAUER (1976)).

Notationsproblem

Als Notationsproblem wurden solche Phänomene angesprochen, bei denen durch eine gegenüber der üblichen mathematischen Schreibweise (z.B. x-y-Notation) abweichende Darstellung von Aufgaben erhöhte Schwierigkeiten auftreten. Diese beziehen sich auf

1) Die Wiedererkennung von typischen Situationsmerkmalen, die die Aktivierung der den Schülern bekannten mathematischen Operationen erlaubt
2) Probleme, die sich auf eine Umcodierung von Symbolen beziehen, also Transformationsprobleme (wie z.B. die Anwendung der Steigungsformel auf einen in ξ-η-notierten Graph einer linearen Funktion)

3) Inhaltliche Probleme, die durch die Verwendung der üblichen Notation im Mathematikunterricht umgangen werden können. Z.B. die Frage, auf welcher Achse stellt man welche Größe dar? Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei $p = \frac{F}{A}$? (Frage in Mathematik für $y = \frac{x}{a}$ einfach zu beantworten).

Eine einheitliche Notation reduziert im Mathematikunterricht zwar die Schwierigkeiten für das mechanische Anwenden von Algorithmen, fixiert deren Anwendungsmöglichkeiten aber zu stark auf bestimmte Darstellungsformen von Aufgaben.
Für mechanisches Lernen wird neben dem Nachteil eines geringen Transfers (s.HILGARD et al.(1953) ; KATONA (194o) auch ein geringeres Behalten angenommen (s. AUSUBEL (1974, S.122-125). Deshalb muß m.E. die Frage einer einheitlichen Notation im Mathematikunterricht neu überdacht werden.
Eine mögliche Alternative wäre die Einführung und Formulierung der Algorithmen in x-y-Notation und das Verwenden anderer Notationen in den Demonstrations- und Übungsbeispielen. Dadurch würde eine mechanische Anwendung von Algorithmen vermieden, und der Schüler müßte die mathematische Bedeutung der Symbole und Beziehungen in der konkreten Situation mitreflektieren. Inwieweit hierbei andere Schwierigkeiten auftreten, müßte empirisch untersucht werden.

Kontextproblem

Ein weiterer Faktor, der den Transfer mathematischer Kenntnisse auf Physik beeinflußt, muß im Aufgabenkontext gesehen werden. Dabei wurde unter Kontext der Problembereich verstanden, auf den sich die mathematische Fragestellung bezieht. Dieser wird in der Regel durch verbale oder bildliche Darstellungen mitgeteilt. Nicht gemeint ist die verbale Verschlüsselung mathematischer Fragestellungen, wie sie z.B. bei Textaufgaben vorliegen. In Mathematikaufgaben bezieht sich der Kontext normalerweise auf abstrakt mathematische Gebilde, die keinen Bezug zu anderen, nichtmathematischen Bereichen erlauben. Bei physikalischen Aufgaben ist es dagegen notwendig, durch den Aufgabenkontext eine Zuordnung zwischen Symbol und Bedeutung zu ermöglichen. Je nach dem Bedeutungsgehalt und mathematischen Problem kann dieser semantische Bezug förderlich oder hinderlich für die Anwendung mathematischer Operationen sein:

1) Hinderlich, wenn der Kontext sich entweder auf ungewöhnliche Inhalte bezieht, die keinen Hinweis auf die Anwendung mathematischer Verfahren liefern können oder dieser assoziativ mit Algorithmen verknüpft ist, die sich nicht auf die Fragestellung beziehen. Z.B. wurde in Voruntersuchungen mit Studenten festgestellt, daß bei Aufgaben zur Vektorrechnung, die sich auf Operationen mit Kräften bezogen, in erhöhtem Maße Vektorsummen gebildet werden, auch dann, wenn Vektorprojektion verlangt wurde (s. auch KRÖPELIN (1966), HÄUSSLER (1975)).

2) Förderlich dagegen, wenn der Kontext das mathematische Problem anschaulich (konkret) macht, d.h. zu bestimmten, für die Lösung wichtigen, Denkoperationen provoziert (heuristische Funktion des Kontexts), oder wenn der Kontext assoziativ mit den anzuwendenden Lösungsstrategien gekoppelt ist.

Daraus folgt, daß zur Verringerung des Kontextproblems im Mathematikunterricht anhand von Aufgaben zu verschiedenem Kontext gelernt werden muß, die für den Lösungsprozeß relevante Information zu erkennen. Darüberhinaus erlauben Kontextaufgaben zu Anwendungssituationen die Veranschaulichung abstrakter Modelle, was sowohl für den Lern- als auch Behaltensprozeß wichtig ist (s. FREUDENTHAL (1968, S. 5-6); SCANDURA (1966); AUSUBEL (1964)). Allerdings sollte verhindert werden, durch einseitige Berücksichtigung eines speziellen Kontexts in Verbindung mit bestimmten mathematischen Inhalten eine bloße Verschiebung des Kontextproblems zu erreichen (s. LYNESS (1968, S. 101-102)).

Verfügungsprobleme

Unter Verfügbarkeit soll die Fähigkeit verstanden werden, einen zum Zeitpunkt A gelernten und gekonnten Inhalt bezüglich einer Klasse von Aufgaben zum Zeitpunkt B auf diese Klasse von Aufgaben richtig anzuwenden. Die Theorien des Behaltens und Vergessens (wegen eines Überblicks s. AUSUBEL (1974, S. 90-135) beziehen sich auf folgende Faktoren, die für die Verfügbarkeit von Gedächtnisinhalten als bedeutsam angesehen werden:

1) Lernform (z.B. deduktiv/induktiv; mechanisch/sinnvoll)
2) Verfügbarkeitsniveau am Ende der Lernphase (z.B. Überlernen)
3) Einfluß nachfolgender Lernprozesse (z.B. retroaktive Interferenz[8], Wiederholen)
4) Weiterhin entscheidend für die Verfügbarkeit ist die psychische Einstellung der Person zum betrachteten Zeitpunkt, die sowohl von äußeren Faktoren (z.B. Prüfungssituation) als auch von inneren Faktoren (z.B. Müdigkeit) abhängt.

Die Auswirkungen dieser Faktoren auf das Behalten und Vergessen sollen hier nicht allgemein diskutiert werden. Anwendbar für die Interpretationen der Behandlungsunterschiede in vorliegender Arbeit erscheint lediglich das Konzept "Lernform", speziell die von AUSUBEL betonten Formen "mechanisches" versus "sinnvolles" Lernen. Es kann angenommen werden, daß die Behandlung B wegen der Abstraktheit der Inhalte im Gegensatz zu Behandlung A mechanisches Lernen (Auswendiglernen) begünstigt. Als Bedingung für sinnvolles Lernen führt AUSUBEL (1974, S.39-43) an:

1) Das Material muß logisch bedeutungsvoll sein, d.h. es darf keine logischen Widersprüche enthalten;
2) das Material muß potentiell bedeutungsvoll sein, d.h. dem Lerner muß aufgrund seiner Lerngeschichte die Einsicht in diese logischen Beziehungen möglich sein;
3) das Material muß psychologisch bedeutungsvoll sein, d.h. es muß während der Lernsituation die logischen Beziehungen beim Lerner aktualisieren können.

Für den Schüler bedeutungsvolles Material liegt demnach dann vor, wenn dieses Material unwillkürliche, vielfältige Beziehungen zu seinen Vorkenntnissen erlaubt, so daß das Lernen sich nicht auf wortwörtliches Auswendiglernen beschränken muß. Die Überlegenheit sinnvollen Lernens über mechanisches Lernen wurde in vielen Untersuchungen nachgewiesen (s. Zusammenfassung bei AUSUBEL (1974, S.122-125). Dabei wirkt sich diese Überlegenheit im Behalten, im Transfer und für bestimmte Aufgabenstellungen auch in der Lernzeit aus. Deshalb folgert AUSUBEL (1974, S. 123):

> "Ein großer Teil des Wissensverlusts läßt sich auf mechanisches Lernen, schlecht organisierten und programmierten Lehrstoff, Doppeldeutigkeit...zurückführen."

M.E. sind die großen Bemühungen der Mathematikdidaktiker im letzten Jahrzehnt, den Beziehungsreichtum abstrakter Strukturen zu verdeutlichen, daran gescheitert, daß es eben nicht gelang, ein für den Schüler psychologisch bedeutsames Material innerhalb der Mathematik zu finden, so daß weitgehend mechanisch gelernt und das Gelernte schnell vergessen wurde.[9] Deshalb wird für eine Verbesserung des Verfügungsproblems im Mathematikunterricht immer wieder die Verdeutlichung abstrakt mathematischer Modelle durch den Bezug auf konkrete, für den Schüler "bedeutungsvolle" Situationen gefordert (ENGEL (1968); FREUDENTHAL (1968); BAUER (1976)). Solche, für das Kenntnisniveau des Schülers "bedeutungsvolle" Situationen zu finden, stellt zur Zeit noch ein großes Problem dar. Physikalische Phänomene können hierzu einen erheblichen Beitrag leisten, sollten aber wegen der Kontextprobleme nicht überbetont werden.

Welche Schlußfolgerungen ergeben sich aus diesen Überlegungen für eine mögliche Strategie zur Verbesserung der Anwendungsprobleme von Mathematik im Physikunterricht seitens des Mathematikunterrichts? Mit DÖRNER (1973, S.89) erscheint mir folgendes Vorgehen sinnvoll:

1) Ermittlung der hauptsächlich vorkommenden Strukturen von Realitätsbereichen (bezogen auf Mathematik) und deren Analyse im Hinblick auf die formale Struktur der Operatoren, Objekte, Probleme (siehe Ansatz von BELL(1974), What does "every man" really need from school mathematics?).

2) Konstruktion von optimalen Informationsverarbeitungsverfahren zur Erzielung einer möglichst vollständigen Beherrschung der Bereiche bei jedem der darin möglichen Probleme.

In der vorliegenden Arbeit wurde in dieser Richtung versucht, für ein begrenztes Gebiet aus der Mathematik und Physik im Bereich der Mittelstufe (Funktionen und ihre Darstellungen) gemeinsame mathematische Probleme zu identifizieren, die die Basis für eine Berücksichtigung von Inhaltsproblemen im Mathematikunterricht bilden könnten. Aufbauend auf diesen Inhalten wurden im nächsten Schritt zwei Lehrsequenzen entwickelt, wobei eine Sequenz sich allein auf den Inhaltsaspekt bezog, während die andere Sequenz zusätzlich auch auf das Notations- und Kontextproblem einging. Damit ergibt sich die Möglichkeit, den Ein-

fluß einer Behandlung von Notations- und Kontextproblemen auf die Anwendungsprobleme in Physik zu untersuchen.

3. Analyse mathematischer Inhalte des Physikunterrichts

Im Bereich der Mittelstufe beziehen sich physikrelevante mathematische Gebiete auf die "Geometrie", "Relationen und Funktionen" und "Aussagenlogik". Methodisch interessant sind dabei vor allem "Relationen und Funktionen", weil

1) dieses Gebiet in der Mittelstufe zusammenhängend behandelt wird und somit keine starke Interferenz durch frühere Lerneerfahrung zu erwarten ist (Dies erscheint vor allem wichtig für die Untersuchung von Notationsproblemen);

2) dieses Gebiet für den Physikunterricht die größte Bedeutung hat, da es sehr eng mit der Algebraisierung physikalischer Phänomene zusammenhängt;

3) ein relativ eindeutiges Klassifikationsschema zur Beschreibung mathematischer Problemtypen auf diesem Gebiet angegeben werden kann, das sowohl für die Inhaltsanalyse als auch die Aufgabenanalyse sehr gut geeignet scheint.

Die Einschränkung der Untersuchung auf diese Inhalte, die in den Hessischen Rahmenrichtlinien Mathematik (HRRM) weitgehend zum Beginn der 9. Klasse behandelt werden (eine Einführung in die Zuordnung von Größenbereichen erfolgt schon in der 7. Klasse), erlaubt eine Beschränkung der Inhaltsanalyse beider Fächer auf die Klasse 7 - 9. Wenn im folgenden von Lehrinhalten die Rede ist, so sind stets die Inhalte in diesen Klassen gemeint.

3.1 Klassifikation mathematischer Inhalte in Physik

Zur Klassifikation funktionaler Zusammenhänge werden drei Kategorien verwendet: Darstellungsform, Darstellungstransformation und Typ von Funktionen.

Darstellungsform:

1) Verbale Darstellung (VD)	: "Je-Desto"-Aussagen; Eigenschaften von Funktionstypen wie "konstant, linear, proportional, umgekehrt proportional".
2) Analytische Darstellung (AD)	: vereinfachtes Pfeildiagramm $a \rightarrow b = f(a)$, $a \in D$ oder Funktionsgleichung $b = f(a)$, $a \in D$.
3) Wertetabelle (WT)	: geordnete Paare reeller Funktionen mit Angabe der Platzhalter
4) Graphische Darstellung (GR)	: Punkte reeller Funktionen in einem Koordinatensystem mit Angabe der Platzhalter.

Ein weiterer Aufgabentyp bezieht sich in Physik auf die Angabe der zugehörigen Komponente zu einer zahlenmäßig oder verbal vorgegebenen Komponente eines geordneten Paares einer Funktion.
Bsp.: Wie groß ist die Energie E einer Feder für $E_{kgm^2/s^2} = 2 \cdot s_m^2$ und $s_m = 3$? oder: Bei welcher Wellenlänge hat die Intensität des Sonnenspektrums ihr Maximum?
Zur Erfassung von Komponenten werden die Symbole benutzt:

1. WX, WY für vorgegebene Werte x , y (WX entspricht z.B. "s_m=3")
2. VX, VY für verbal gekennzeichnete Komponenten (VY entspricht z.B. "Maximum")

Darstellungstransformation:

Unter Darstellungstransformation einer Funktion wird die Umwandlung einer der vier Darstellungen in eine andere verstanden. Daraus ergeben sich 16 denkbare Transformationen. Zusätzlich müssen Operationen berücksichtigt werden, die sich auf die Berechnung oder Bestimmung von Einzelwerten (WX, WY) aus zahlenmäßig oder verbal vorgegebenen Werten (z.B. WY oder VX) anhand von Funktionsdarstellungen ergeben. Diese stellen im strengen Sinne keine Darstellungstransformationen dar.
Während mathematisch exakt nicht alle diese Transformationen realisierbar sind, werden sie in Physik bei Kenntnis des Funktionstyps häufig angewendet.
Bsp.: Wertetabelle (WT) in analytische Darstellung (AD); kurz WT → AD.
Anhand einer Wertetabelle (WT) zu vorgegebenem Funktionswert (WY) das Argument (WX) bestimmen; kurz WY ∪ WT → WX.

Eine übersichtliche Darstellung aller Kombinationen wird durch folgende Matrix (Transformationsmatrix genannt) möglich:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WX/WY
VD		x			
AD					o
WT					
GR					

Erläuterung: Jedem Feld kann eine bestimmte Transformation zugeordnet werden. Z.B. entspricht dem Kreuz die Transformation VD → AD: verbale Darstellung (z.B. "x proportional y") in analytische Darstellung (x → y = ax).
Die 5. Spalte kennzeichnet Operationen bezüglich vorgegebener Funktionen. Z.B. entspricht der Kreis der Operation WX ∪ AD → WY: zu Argument (WX) und analytischer Darstellung (AD) (z.B. "x_4 = 3 und y = 3x") ist Funktionswert (WY) zu berechnen. Die Diagonalelemente entsprechen Transformationen innerhalb einer Darstellungsform (z.B. kann Wertetabelle für ein Argument s durch algebraische Operationen in Wertetabelle für Argument $\Delta s = s - s_0$ überführt werden (s. Hooksches Gesetz)).

Funktionstyp:
Die Berücksichtigung des Funktionstyps (z.B. lineare, inverse Funktion) in der Analyse wird notwendig, da hierdurch in hohem Maße die Schwierigkeiten von Darstellungen und Darstellungstransformationen bestimmt sind.

3.2 Analyse mathematischer Inhalte in Lehrplänen und Schulbüchern

Eine mathematische Inhaltsanalyse für das Vorgehen in Physik stößt auf folgende Schwierigkeiten:

1) Die knappe Formulierung von Lehrinhalten in Lehrplänen und Lehrbüchern läßt häufig nicht erkennen, welche Darstellungen oder Transformationen gemeint sind, d.h. über welchen Weg funktionale Beziehungen zwischen Größen abgeleitet werden. Hierdurch ergibt sich eine relativ subjektive, unpräzise Klassifikation, besonders für verbale Darstellungen.

2) Die Anordnung klassischer Inhalte der Physik wird in verschiedenen Bundesländern und Schulbüchern sehr unterschiedlich gehandhabt. Dabei variiert vor allem die Stellung der Mechanik, die erhebliche Anforderungen an das Abstraktionsvermögen im Vergleich zur Wärmelehre und Optik stellt. Die Schulbuchanalyse orientiert sich deshalb am Vorgehen in den Hessischen Rahmenrichtlinien Physik (HRRP), in denen die Mechanik am Ende der Mittelstufe behandelt wird (siehe hierzu Beitrag von JUNG (1971) über neue Prinzipien moderner Physikcurricula).

3) Die Fülle der Lehrpläne und Schulbücher macht eine Auswahl notwendig, deren Kriterien relativ willkürlich sein müssen, da es keinen allgemein anerkannten "besten" Lehrplan, kein "bestes" Lehrbuch gibt. Da die Untersuchung in Hessen erfolgt, liegt das Schwergewicht der Analyse auf den hessischen Lehrplänen und Schulbüchern.

A Lehrpläne Physik

Genauer analysiert werden die Hessischen Rahmenrichtlinien Physik (HRRP) und Richtlinien und Lehrpläne von Hamburg. Beide sind relativ neu und ausführlich und vertreten verschiedene Vorgehensweisen bei der Anordnung der Inhalte. Wie schon oben erwähnt, läßt die verkürzte Schreibweise in den Lehrplänen kei-

ne genaue Identifizierung von Transformationen zu. Deshalb erfolgt lediglich eine Zusammenstellung der erwähnten mathematischen Inhalte, die sich auf Funktionen beziehen.

Hessische Rahmenrichtlinien Physik (1972)

Folgende Gebiete werden in Klasse 7 - 9 behandelt:
7. Klasse: Optik ; 8. Klasse: Wärmelehre und Elektrizitätslehre; 9. Klasse: Elektrizitätslehre II. Lehrziele, in denen quantitative Beziehungen erwähnt werden, sind:

Optik: Bildkonstruktion ($B/G = b/a$)
Wärmelehre: Temperaturabhängigkeit des Volumens ($V = V(T)$)
Elektrizitätslehre: Kirchhoffschen Gesetze ($I_G = \sum_i I_i$; $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}$); Definition der Ladung, Kapazität, Widerstand ($Q = I \cdot t$, $Q = CU$, $R = \frac{U}{I}$); Ohmsches Gesetz ($\frac{U}{I} = \text{const}$); Schaltalgebra(Boolesche Algebra)

Daraus folgt, daß für die HRRP der Anteil mathematischer Inhalte, der sich auf quantitative Zusammenhänge bezieht, in der 7. und 8. Klasse sehr gering ist. Erst in der Elektrizitätslehre (9. Klasse) erhöht sich dieser Anteil beträchtlich.

Eine wesentlich detailliertere Übersicht über die im Physikunterricht (bis Klasse 1o) anzuwendenden mathematischen Methoden kann man den Grobzielen der HRRP entnehmen, die der Sammlung von Lehrzielen vorangestellt wurden. Auch wenn, wie von BARTH et al. (1974, S. 832) angemerkt, eine überzeugende Zuordnung der Grobziele zu den Lehreinheiten fehlt, geben sie Hinweise auf Inhalte, die mit folgenden mathematisch formulierten Lehrzielen verträglich sind (in Klammer sind Grobziele HRRP angegeben, auf die sich Lehrziel bezieht):

1) Zugeordnete Elemente einer Paarmenge als Wertetabelle darstellen (s. 1.2; 2.5);
2) Wertetabelle als Graphen darstellen (1.2; 2.3; 2.5; 2.9);
3) Aufzählende Darstellungen (Wertetabelle, Graph) durch analytische Darstellung beschreiben (1.2; 2.5; 2.8);
4) Relation zwischen geordneten Paaren einer Paarmenge (Wertetabelle; Graph) verbal beschreiben (2.4; 2.7);

5) Relation zwischen geordneten Paaren einer analytischen Funktion verbal beschreiben (2.5; 2.9);
6) Erkennen des Funktionstyps (2.5; 2.9).

Direkt angesprochen werden die quantitativen Methoden der Physik in Grobziel 2.5 (Übertragung eines physikalischen Problems in die Sprache der Mathematik). Dieses Ziel wird aber nur einer einzigen Lerneinheit (XV), der Schaltalgebra, zugeordnet, was m.E. ein denkbar schlechtes Demonstrationsbeispiel für dieses Grobziel darstellt.
Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in den HRRP quantitative Methoden bis zum Ende der 9. Klasse Physik zugunsten qualitativer Betrachtungsweisen weitgehend vermieden werden. Damit wird aber m.E. versäumt, den Schülern systematisch physikalische Anwendungssituationen für die in der 9. Klasse Mathematik gelernten funktionalen Beziehungen aufzuzeigen und bei der Übertragung dieser Inhalte zu unterstützen.

Richtlinien und Lehrpläne Physik, Hamburg (1973)

In den Klassen 7 - 9 werden folgende Gebiete behandelt:
Klasse 7: Stromkreis, Magnetismus, Lichtausbreitung, thermische Eigenschaften; Klasse 8: Bewegung, Masse und Kraft, mechanische Energie, elektrische Größen, optische Abbildungen; Klasse 9: Druck, Gasgesetze, Wärmemenge, verzweigter Stromkreis, elektrische Energie, Induktion.

Lehrziele, in denen quantitative Beziehungen erwähnt werden, sind:

Lichtausbreitung:	Reflexionsgesetz, Abbildungsgesetz, graphische Darstellung des Brechungsgesetzes ($\beta = f(\alpha)$)
Bewegung	: s(t)-Diagramm, gleichförmige Bewegung ($s \sim t$ bzw. $s = vt$), vektorielle Addition von Geschwindigkeiten.
mechanische Energie	: Hubarbeit ($W = F \cdot s$), Pendel ($E_{kin} = E_{pot}$), Leistung ($p = \frac{W}{t}$)
elektrische Größen	: Definition des Widerstandes ($R = U/I$), Ohmsches Gesetz ($U/I = c$), Strom-Spannungs- und Widerstand-Spannungs-Diagramme.

Optische Abbildungen	: Brechungsgesetz, Abbildungsgleichung ($\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ oder $(g-f)(b-f) = f^2$), Definition der Vergrößerung ($V = \frac{s}{f}$).
Druck	: Definition des Drucks ($p = \frac{F}{A}$ oder $p = h \cdot \gamma$)
Gasgesetze	: Temperaturabhängigkeit des Volumens ($V(\vartheta)$-Diagramm), ideales Gasgesetz als Zusammenfassung dreier spezieller Gesetze ($p \cdot V = K \cdot T$).
Wärmemenge	: Definition der Wärmekapazität ($C = \frac{Q}{\Delta\vartheta}$).
verzweigter Stromkreis	: Kirchhoffsche Gesetze
elektrische Energie	: $E = U \cdot I \cdot t$

Im Gegensatz zu den HRRP wird in den Hamburger Lehrplänen im höheren Maße Bezug auf quantitative Darstellungen genommen, was z.T. durch die frühzeitige Behandlung der Mechanik bedingt ist.

Anzumerken ist der häufige Verweis auf graphische Darstellungen, die wegen ihres ikonischen (bildlichen) Aspekts für Schüler leichter zugänglich sind (vgl. BRUNER, J.S., 1964).

Diese Ausführungen lassen erkennen, welches mathematische Niveau in den beiden Lehrplänen angesprochen wird. Lehrpläne anderer Bundesländer sind in ihren Anforderungen meistens zwischen diesen Niveaus anzusiedeln, gehen aber teilweise auch darüber hinaus (z.B. Richtlinien für Realschulen, Niedersachsen, 1969)[10]. Wie erwähnt, läßt sich nur selten angeben, über welche Transformationen die funktionalen Zusammenhänge erarbeitet werden. Dies ist erst anhand der ausführlicheren Schulbücher möglich.

B Schulbücher Physik

Die Schulbuchanalyse bezieht sich auf vier verschiedene Werke: KUHN et al., Physik I (1975), BERGMANN et al., Einführung in die Physik (1974), DORN et al., Physik Mittelstufe (1974) und WALZ, Physik (1974). Dabei wurde im Lehrbuch von KUHN et al. die in den HRRP angegebene Stoffauswahl, die der Tendenz neuerer amerikanischer Curricula entspricht (s. z.B. Science Curriculum Improvement Study (SCIS), SPRECKELSEN (1968), S.41 -43), am konsequentesten verwirklicht.

Um eine Vergleichbarkeit der untersuchten Inhalte für die 7.-9. Klasse zu gewährleisten, wurden deshalb die Gebiete in den vier Lehrbüchern auf ihren mathematischen Gehalt untersucht, die in den HRRP diesen Klassen zugeordnet werden. Diese sind, wie schon erwähnt: Optik (7. Klasse), Wärmezustand und Transport, Stromkreis und Elektrostatik (8. Klasse), Induktion und Schaltalgebra (9. Klasse).
Die Anwendung des Klassifikationschemas für Darstellungen und Transformationen machte für AD (Analytische Darstellungen), WT (Wertetabellen) und GR (Graphen) geringe Schwierigkeiten. Dagegen war eine Erfassung der Kategorie VD (Verbale Darstellung) nur schwer möglich, da im Text eine Fülle von Aussagen auftauchten, die dieser Darstellung zuzuordnen wären. Deshalb konnte diese Darstellung nicht systematisch erfaßt werden.
Bei den Darstellungstransformationen wurden nur die Beispiele berücksichtigt, die Transformationen explizit vorführen. Als unvollständige Darstellung einer Transformation wird z.B. angesehen: "Wie der Helligkeitsvergleich zeigt, führen beide Annahmen zum gleichen Ergebnis. Wir setzen deshalb fest: 1)...: $E \sim I$ 2)...: $E \sim \frac{1}{r^2}$." (KUHN et al. (1974), S. O5)
Die zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse der Analyse orientiert sich an den drei oben genannten Kategorien, wobei die Funktionstypen bei der analytischen Darstellung mit aufgeführt werden.

I Darstellungsformen

1) Verbale Darstellungen (VD):
   Typische verbale Darstellungen sind:
   a) "Größe A nimmt mit Größe B zu/ab" oder "Je größer A, desto größer/kleiner B"
      Bsp.: "Widerstand reiner Metalle nimmt mit der Temperatur zu"(KUHN et al. (1974), E56); "Je größer der brechende Winkel ist, um so größer ist auch die Ablenkung"(BERGMANN et al. (1974), Bd. I, S.247);

   b) "Größe A ist proportional/umgekehrt proportional zu B" oder "n-fache von A entspricht dem n-fachen von B"
      Bsp.: "Die Beleuchtungsstärke ist umgekehrt proportional zum Quadrat der Entfernung" (KUHN (1974), O5; DORN (1974), S.282); "n hintereinandergeschaltete Generatoren gleicher Spannung liefern die n-fache Normalspannung"(KUHN, S. E54)

2) Analytische Darstellungen (AD):

Analytische Darstellungen sind die häufigste Darstellung quantitativer Zusammenhänge und werden fast ausschließlich als Größenproportionen ($A \sim f(B)$ oder Größengleichungen ($A = f(B)$) ohne Angaben von Maßeinheiten angegeben (s. Diskussion über den "Größenstandpunkt", FLEISCHMANN (1951)). Sie beziehen sich auf folgende Zusammenhänge:

a) Funktionale Abhängigkeiten, denen ein Funktionstyp eindeutig zugeordnet werden kann:
$E \sim I$, $I \sim \frac{1}{R}$, $E \sim \frac{1}{r^2}$

b) Funktionen mehrerer Variablen:
$I = I_1 + I_2$, $\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}$, $Q = CU$, $n = \frac{a}{b}$, $G/B = a/B$, $E = \frac{I}{r^2}$,
$T = k(\frac{f}{a})^2$

Eine Anlehnung an die im Mathematikunterricht übliche Sprech- und Schreibweise erfolgt nicht.[11] Zugeschnittene Größengleichungen werden selten verwendet. Ebenso werden keine Gültigkeitsbereiche der Gesetze angegeben. Eine mathematische Einführung von Funktionen mehrerer Variablen und ihr Bezug zu Funktionstypen wird nicht erarbeitet.

3) Wertetabellen (WT):

Wertetabellen funktionaler Beziehungen werden nur selten verwendet (Häufigkeit von WT im Mittel ~ 10). Sie enthalten ausschließlich geordnete Paare der den Phänomenen zugrundeliegenden <u>Gesetze</u> (Formeln), so daß ein Eingehen auf Meßfehler umgangen wird. Weiterhin sind sie durch geschickte Annahmen und Auswahl der Argumente in solcher Form aufbereitet, daß funktionale Abhängigkeiten leicht erkannt werden können. Diese Tendenz vermittelt den Eindruck, daß in den Schulbüchern bei quantitativen Zusammenhängen die Verbindung zur Ebene des Phänomens, d.h. der eigentlich physikalische Prozeß (z.B. Meßprozeß) zugunsten einer rein mathematischen Betrachtungsweise unberücksichtigt bleibt. Z.T. ist das darauf zurückzuführen, daß aus diesen Wertetabellen direkt auf den analytischen Zusammenhang geschlos-

sen werden soll, womit graphische Darstellungen umgangen werden. In verstärktem Maße findet man dies bei BERGMANN et al (1974) (s. Bd. I, S. 226,287; Bd.II, S.71,74,82).

4) Graphische Darstellungen (GR):

Die Bemerkungen für Wertetabellen gelten verstärkt auch für Graphen. Häufig werden die Maßstäbe weggelassen; die Begriffe "Ausgleichskurve", "angenähert" brauchen nicht verwendet zu werden, da es sich um Darstellung der idealisierenden Gesetze und nicht um empirische Daten handelt. Die fehlenden Maßstäbe machen es weiterhin unmöglich, den Informationsgehalt graphischer Darstellungen für die Intra- und Extrapolation von quantitativen Vorhersagen zu nutzen. Damit vollzieht sich die Algebraisierung physikalischer Phänomene in einer sterilen Atmosphäre, in enger Anlehnung an den Mathematikunterricht.

Zusammenfassend muß man für die betrachteten Physikbücher feststellen, daß sie es vermeiden, entsprechende physikalische Erkenntnisse aus experimentellen (nichtidealisierten) Daten abzuleiten. Damit machen sie es dem Schüler unmöglich, den Prozeß "Phänomen" - "Theorie" - "Vorhersage" als einen Idealisierungsprozeß zu erkennen und in Frage zu stellen. Bemerkenswert ist die weitgehende Vernachlässigung graphischer Darstellungen, die auf dieser Alterstufe zur Unterstützung abstrakterer Darstellungsformen sehr wichtig erscheint (s.a. JUNG, 197o, S.37)

II Darstellungstransformationen

Die Analyse berücksichtigt, wie schon angemerkt, nur solche Transformationen, die eine vorgegebene Darstellung einer Funktion in eine andere überführt. Sehr häufig baut eine funktionale Beziehung aber auf Versuchen auf, deren Ergebnisse nicht mitgeteilt werden. (Bsp.: "Mißt man jeweils..., so findet man, daß... Es besteht also die Gleichung..." (s. z.B. KUHN et al. S. 027) oder es wird eine Versuchsbeschreibung, die Hin-

weise auf Meßwerte enthält, mit der Angabe des Gesetzes abgeschlossen. Erläutert wird dies mit Sätzen wie: "Versuche und Erfahrungen bestätigen; es gilt deshalb; wie hier nicht nachgewiesen werden soll". Die folgende Transformationsmatrix gibt einen Überblick über die in den vier Büchern verwendeten, vollständig gebrachten Transformationen:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WX/WY
VD		⊗			
AD	⊗	×			×
WT	×	⊗		×	
GR		×			

Transformationen in Physikbüchern

Erläuterung: Das Feld ⊗ entspricht z.B. der Transformation Wertetabelle (WT) in analytische Darstellung (AD).

Zeichen × : Transformation kommt mindestens 4mal vor

Zeichen ⊗ : Transformation kommt mindestens 12mal in den untersuchten Büchern vor.

Ergebnis:

1) Analytische Darstellungen ergeben sich häufig aus verbalen Darstellungen oder Wertetabellen;
   Bsp.: "Im verzweigten Stromkreis ist die Summe der Teilstromstärken gleich der Gesamtstromstärke: $I_1 + I_2 = I$." (KUHN et al., S. E33)
   oder für WT → AD siehe Ableitung der Beziehung zwischen Bild/Gegenstands-Größe und Weite (KUHN et al. S. O37).
   Graphische Darstellungen zur Erkennung von Funktionstypen (GR → AD) werden selten verwendet.
2) Ebenfalls häufiger werden die Transformationen AD → VD (verbale Beschreibung einer analytischen Darstellung) und WT → GR (graphische Darstellung von Wertetabellen) verwendet. Letztere z.T. in Verbindung mit trigonometrischen Funktionen (Brechungsgesetz) und Exponential-/Logarithmusfunktionen (Kennlinien), deren analytische Darstellungen auf dieser Klassenstufe nicht möglich sind.
3) Relativ selten tauchen die Berechnung von Funktionswerten (WX ∪ AD → WY), die verbale Beschreibung von Wertetabellen (WT → VD) und die Zusammenfassung von mehreren analytischen Darstellungen zu einer gemeinsamen Formel (AD → AD) auf.

Diese Ergebnisse, deren quantitativer Aspekt (häufige/weniger häufige Transformation) wegen unzureichender operationaler Analyseverfahren nicht überinterpretiert werden darf, gibt ei-

nen Überblick über die im Physikunterricht (7. - 9. Klasse) verwendeten Darstellungen und Transformationen von Funktionen, die sich weitgehend auf lineare und inverse Funktionstypen beziehen. Eine Einführung der verwendeten Transformationen und deren Begründung erfolgt nicht. Demnach wird vorausgesetzt, daß diese Inhalte im Mathematikunterricht ausreichend behandelt werden.

Inwieweit diese Inhalte in den Lehrplänen Mathematik berücksichtigt werden, soll nun aufgezeigt werden.

C Lehrpläne Mathematik

Wie bei den Lehrplänen Physik werden wiederum die Hessischen Rahmenrichtlinien Mathematik (HRRM) und die Lehrpläne von Hamburg, bezogen auf die 7. - 9. Klasse, zur Analyse herangezogen.

Hessische Rahmenrichtlinien Mathematik (1972)

Die Behandlung von Inhalten, die den Relationen und Funktionen zugeordnet werden können, erfolgt sowohl in der 7. Klasse (Zuordnung zwischen Größenbereichen; Zeit: 7 Wochen) als auch in der 9. Klasse (25. Relationen und Funktionen, 26. Lineare Funktionen; Zeit: 5 Wochen). Das Schwergewicht in der 7. Klasse liegt auf Wertetabellen und Graphen, während in der 9. Klasse der Relations- und Funktionsbegriff, analytische Darstellungen und der allgemein lineare Funktionstyp erarbeitet werden.

Die folgende Zusammenstellung gibt einen Überblick über Lehrziele zu den Darstellungsformen und Transformationen (Zahl in Klammern verweist auf entsprechendes Lehrziel in den HRRM).

1) Darstellungsformen

a) Verbale Darstellung	: Erwähnt werden "je-desto"-Strukturen und monotone Zusammenhänge (13.1.10); Antiproportionalität (13.2.1,13.3.1)
b) Analytische Darstellung	: Werden meistens in der Form vereinfachter Pfeildiagramme ($x \rightarrow f(x)$) dargestellt; aber auch Hinweis auf in Physik übliche Funktionsgleichung ($y = f(x)$; 24.4.8)
c) Wertetabelle	: Werden sowohl in 7. als auch 9. Klasse (13.1, 24.1) verwendet
d) Graph	: Einführung des Koordinatensystems in Klasse 7 (13.1.4) mit Hinweis auf die sinnvolle Wahl des Maßstabes (13.1.5)

2) Darstellungstransformationen

Die Lehrziele der HRRM beziehen sich auf folgende Darstellungstransformationen und Operationen:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WX/WY
VD					
AD	7	7	7 9	9	
WT	7 9	9		7 9	7
GR		9	7 9		7 9

Transformationsmatrix für HRRM

Zeichenerklärung:

7 Lehrziel in HRRM 7. Klasse
9 Lehrziel in HRRM 9. Klasse

Anmerkungen:

1) Die Transformationen betreffen sowohl Zahlfunktionen als auch Zusammenhänge zwischen Größen. Für beide Klassenstufen wird die Wichtigkeit dieser Inhalte für praktische Anwendungen betont und immer wieder die Berücksichtigung des Umweltbereichs verlangt. Leider wird es dem Lehrer überlassen, hierfür entsprechende Beispiele zu suchen, sodaß wegen der damit verbundenen Schwierigkeiten eine Konkretisierung der Intention zu scheitern droht. So merkt REICHENBACHER (1974) in seinem Erprobungsbericht zu den HRRM für Lehrziele der 8. Klasse an: "Stoff zu umfangreich" und weiter:

   "Bei den zahlreichen Hinweisen auf die "Umwelt" fehlen Konkretisierungen (manchmal wirken diese Hinweise ausgesprochen gekünstelt)."

   Er fordert deshalb: "Detaillierte Anbindung der mathematischen Stoffe an Verwendungssituationen...anstelle des Verweises auf die "Umwelt"."

2) Die Bestimmung von Funktionsgleichungen aus Wertetabelle und Graph (WT, GR → AD) wird ausschließlich für lineare Funktionen behandelt, während sich graphische Darstellungen auf lineare, quadratische und inverse Funktionen beziehen. Unzureichend behandelt werden Funktionen mehrerer Variablen, wie sie in den Physikbüchern häufig auftauchen.

3) Bestimmte Kapitel (24.2, 24.3) beziehen sich auf systematische Behandlung der Eigenschaften von Relationen, die für praktische Anwendungen keine Relevanz haben.

Richtlinien und Lehrpläne Mathematik, Hamburg

Im Gegensatz zu den HRRM sind die Lehrpläne von Hamburg und anderen Bundesländern wesentlich knapper formuliert und lassen keine genaue Identifizierung einzelner Transformationen zu. Wichtig anzumerken ist auch, daß die Zuordnung von Relationen und Funktionen zu den Klassenstufen sehr unterschiedlich gehandhabt wird. In Hamburg werden beide Inhalte zusammen in der 7. Klasse vorgeschrieben[12]. Ähnlich wie in den HRRM lernen die Schüler zuerst mögliche Darstellungsformen von Relationen (Wertetabelle, Graph, analytische Darstellungen). Bezüglich der Transformationen wird angemerkt, daß man Graphen einfacher Funktionen im Koordinatensystem darstellen können soll (AD → WT → GR). Als einfach werden allgemeine lineare und antiproportionale Funktionen angesehen, für die als "natürliche" Anwendungsgebiete z.B. Prozentrechnung angegeben wird.
Inwieweit die Transformation eines Graphen oder einer Wertetabelle in eine analytische Darstellung behandelt wird, ist schwer zu erkennen. Da für Relationen und Funktionen nur eine Zeit von 9 Wochen angesetzt wurde (in HRRM insgesamt 12 Wochen), bleibt zu befürchten, daß diese Inhalte nur unzureichend bearbeitet werden, schon deshalb, weil sie auch erhebliche Anforderungen an das Abstraktionsvermögen von Schülern der 7. Klasse stellen. Die weiteren Überlegungen zum Inhaltsproblem Mathematik- und Physikunterricht beziehen sich deshalb ausschließlich auf die detaillierteren Darstellungen in den HRRM.

3.3 Analyse gemeinsamer mathematischer Inhalte von Physik- und Mathematikunterricht der 7. - 9. Klasse

Ziel der Lehrplan- und Lehrbuchanalyse war es, mathematische Inhalte im Physikunterricht aufzuzeigen, die im Rahmen des Mathematikunterrichts mit Bezug auf die gültigen Lehrpläne Mathematik vermittelt werden können. Im folgenden werden die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Inhalten beider Fächer (ohne Berücksichtigung von Notation und Kontext) bezüglich der verwendeten Darstellungsformen und Transformationen zusammengestellt.

A Darstellungsform

1) Verbale Darstellungen
Gemeinsamkeiten: "Je-desto"-Strukturen, Monotonie, Proportionalität und Antiproportionalität.
Unterschied: In Physik werden zusätzlich empirische Funktionen (z.B. Spektrum) und Funktionen mehrerer Variablen beschrieben.

2) Analytische Darstellungen
Gemeinsamkeiten: lineare, inverse, quadratische Funktionen.
Unterschiede: Darstellungsformen in Physik sind Funktionsgleichungen ($y = f(x)$), in Mathematik vereinfachte Pfeildiagramme ($x \rightarrow f(x)$) mit Angabe des Definitions- und Wertebereichs. Physikalische Formeln beziehen sich häufig auf Funktionen mehrerer Variablen.

3) Wertetabellen
Gemeinsamkeiten: Angabe geordneter Paare von Funktionen mit Platzhalter.
Unterschiede: In Mathematik wird zwischen Argument und Funktionswert unterschieden. In Physik werden häufig Wertetabellen für mehr als zwei Variable verwendet.

4) Graphen
Gemeinsamkeiten: Koordinatensystem mit verschiedenen Achsmaßstäben; Angabe von Platzhaltern, Kurven linearer und inverser Funktionen.
Unterschiede: In der Physik werden häufig nur Kurvenverläufe ohne Angabe von Maßstäben dargestellt; idealisierte Wiedergabe empirischer Daten durch mathematische Funktionen; Parameterdarstellung von Funktionen; keine Unterscheidung zwischen Definitions- und Wertebereich.

B Transformationen

Die folgende Matrix gibt einen Überblick über die in den Physikbüchern und den HRRM verwendeten Transformationen:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WX/WY
VD					
AD	7	7	7 9	9	
WT	7 9	9		7 9	7
GR		9	7 9		7 9

Transformationsmatrix für HRRM und Physikbücher

Zeichenerklärung:

7 Lehrziel in HRRM 7. Klasse

9 Lehrziel in HRRM 9. Klasse

□ Transformationen in Physikbüchern

Der Vergleich der Transformationen in beiden Fächern erfolgt in Abhängigkeit von der jeweils vorgegebenen Darstellung:

1) Verbale Darstellung (VD) vorgegeben
   Unterschiede: In Physik werden häufig verbale Darstellungen (VD) in analytische Darstellungen umgewandelt (VD→AD). Ihre Funktion ist die sprachliche Vermittlung zwischen Experiment und formelmäßiger Beschreibung.
2) Analytische Darstellung (AD) vorgegeben
   Gemeinsamkeiten: Verbale Beschreibung analytischer Funktionen (AD→VD), Zusammenfassung verschiedener analytischer Darstellungen (Proportionalitäten) zu gemeinsamem Term (AD→AD).
   Unterschiede: In Mathematik wird zusätzlich der Übergang zu Wertetabellen (AD→WT) und Graphen (AD→GR) betont, während in Physik zu vorgegebenen Randbedingungen ein bestimmter Wert berechnet werden soll (WX AD→WY). Die Transformation AD→AD bezieht sich in der Mathematik auf einfachste Fälle, da Lehrstoff der 7. Klasse.
3) Wertetabelle (WT) vorgegeben
   Gemeinsamkeiten: Aus Wertetabellen werden verbale Darstellungen (Monotonie, Proportialität, Antiproportionalität als auch direkt analytische Darstellungen abgeleitet. Weiterhin erfolgt graphische Darstellung von Wertetabellen.
   Unterschiede: In Mathematik wird zusätzlich die Bestimmung von Funktionswerten zu vorgegebenem Argument geübt (WX∪WT→WY), was im Zusammenhang mit der Einführung des Rechenstabs steht. Das Vorgehen in den Lehrbüchern Physik bezieht sich demgegenüber ausschließlich auf idealisierte WT, die die Verwendung des Rechenstabes überflüssig macht (leider).

4) Graphische Darstellungen (GR) vorgegeben
   Gemeinsamkeiten: Erkennung von Funktionstypen.
   Unterschiede: In Mathematik wird zusätzlich die Bestimmung von Formvariablen (Steigung, konstantes Glied) verlangt; weiterhin die Bestimmung von Wertetabellen und Funktionswerten zu vorgegebenem Argument. In diesem Unterschied drückt sich m.E. die Vernachlässigung von Graphen für die Vorhersage von Ereignissen im Physikunterricht aus.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die HRRM in hohem Maße die im Physikunterricht verwendeten mathematischen Inhalte berücksichtigen. Häufig werden sogar darüber hinaus gehende Inhalte, die für den Physikunterricht wichtig sein könnten, angesprochen. Deshalb ist es möglich, in Bezug auf die HRRM eine Unterrichtssequenz für den Mathematikunterricht der 9. Klasse zu entwickeln, in der die in den empirischen Untersuchungen aufgezeigten Inhaltsprobleme besonders berücksichtigt werden können (s. nächstes Kapitel).

4 Versuchsplanung

Im folgenden Kapitel werden die Grundgedanken der Untersuchung über eine mögliche Verbesserung des Mathematikunterrichts im Hinblick auf mathematische Anwendungsprobleme in Physik dargestellt. Weiterhin werden die Kriterien (Testaufgaben) beschrieben und die bezüglich dieser Aufgaben aufgestellten Hypothesen angegeben. Auf den Versuchsplan zur Hypothesenprüfung, mögliche Fehlerquellen und deren Berücksichtigung wird abschließend hingewiesen.

4.1 Grundlegende Überlegungen zum Versuchsplan

Die vorangegangenen Analysen sollten deutlich machen: Die Mathematik hat eine zentrale Bedeutung für Physik, und zwar sowohl für die Beschreibung als auch die Systematisierung physikalischer Phänomene. Der Physikunterricht kann trotz aller didaktischer Bemühungen um eine konstruktive Vereinfachung physikalischer Strukturen auf ein bestimmtes Maß an mathematischen Inhalten nicht verzichten. Die Bereitstellung dieser Inhalte wird fast ausschließlich dem Mathematikunterricht zugeschrieben, der diese Aufgabe wegen eigener Zielsetzungen (Strukturmathematik) nur unzureichend erfüllt. Erwartungen bezüglich eines weitreichenden Transfers mathematischer Inhalte durch die Betonung mathematischer Strukturen konnten nicht bestätigt werden (BAUER, 1976).

Die vorliegende Untersuchung basiert deshalb auf der Annahme, daß eine Verbesserung des Transfers mathematischer Kenntnisse auf physikalische Aufgaben nur durch die Berücksichtigung von Notations- und Kontextproblemen in der Einführungs- und Übungsphase des Mathematikunterrichts effizient möglich ist. Demgegenüber wird das normale Vorgehen im Unterricht, Notations- und Kontextprobleme bestenfalls nach dem Einlernen und Festigung neuer Strukturen aufzugreifen, als unzureichend gesehen. Unzureichend deshalb, weil der Aufbau der Beziehungen weitgehend abgeschlossen ist, bevor die Anwendungsbezüge erwähnt werden. Anwendungen müssen demnach als Erschwerung an sich einfacher mathematischer Verfahren und und weitgehend losgelöst von diesen erlebt werden, was für einem Transfer hinderlich

ist. Demgegenüber sollte eine kontinuierliche Brücksichtigung von Notations- und Kontextproblemen durch Einbeziehung von bedeutungsvollen Anwendungssituationen in der Einführungs- und Übungsphase entsprechende Transferprobleme im Physikunterricht abbauen, auch dann, wenn sich diese Beispiele nicht auf einen physikalischen Kontext beziehen.

Zur Prüfung dieser Hypothese wurde für das Gebiet der Relationen und Funktionen zwei Behandlungen A und B bezüglich ihrer Effektivität, die Lösung physikalischer Aufgaben zu begünstigen, verglichen. Im Einzelnen wurden in den Behandlungen folgende Aspekte berücksichtigt:

Aspekt	Behandlung A	Behandlung B
Inhalt	Akzentuierung und Erweiterung der Lehrziele in den HRRM aufgrund gemeinsamer Inhalte von Physik- und Mathematikunterricht.	
Notation	Abwechselnde Verwendung von x-y-Notation/ anderen Platzhaltern (z.B. u, v) und Größen (z.B. $E_{\%}$, L_{Lux})	Einheitliche Verwendung der x-y-Notation in allen Beispielen
Kontext	Verwendung von nichtphysikalischen Beispielen in der Einführung und Übung (z.B. Untersuchungsergebnisse aus der Psychologie, Pädagogik)	Ausschließliche Verwendung von mathematikimmanenten Beispielen
Verfügung	Konkretisierung abstrakter Situationen an Beispielen,die Beziehungen zum Erfahrungshintergrund des S. zulassen.	
	Die Sequenzierung der Inhalte aufgrund einer logischen Analyse; gezielte methodische Hilfen (s. Kap. 5) sollten ein Behalten begünstigen.	

Die Lernzeit war für beide Behandlungen gleich. Da auch eine weitgehende Übereinstimmung in den mathematischen Inhalten und den Unterrichtsmethoden beider Behandlungen vorlag, erfolgte apriori keine Benachteiligung der Gruppe B (Kontrollgruppe) bezüglich mathematischer Inhalte. Deshalb wurden auch keine grossen Unterschiede in der Lösung mathematischer Aufgaben in x-y-Notation erwartet.

4.2 Kriterien zur Erfassung der Behandlungsunterschiede und Formulierung der Hypothesen

Wie schon festgestellt, werden in dieser Arbeit weitgehend Anwendungsprobleme in physikalischen Aufgabensituationen untersucht. Dabei sollte die Lösung der Aufgaben unabhängig von spezifisch physikalischen Kenntnissen möglich sein. Andernfalls könnten Inhomogenitäten der Gruppen bezüglich der Physikkenntnisse die Behandlungseffekte verzerren.
Die Prüfung der Unterschiede basiert auf zwei Aufgabenarten:
Mathematikaufgaben(M-Aufgaben): Mathematikimmanente Aufgabensituation, formuliert in x-y-Notation
Physikaufgaben(P-Aufgaben) : Aufgaben, die sich auf einen physikalischen Kontext beziehen, in dem als Platzhalter physikalische Größen verwendet werden.
Bezüglich dieser wurden vier verschiedene Aufgabentypen konstruiert, die sich auf die explizite oder implizite Anwendung von Darstellungstransformationen bezogen (wegen genauerer Angaben siehe Abschnitt 5.2):

1) Isomorphe Aufgabenpaare zur Erfassung von Notations- und Kontextproblemen
   Aufgaben werden als "isomorph" bezeichnet, wenn sie sich auf den gleichen mathematischen Inhalt, aber auf unterschiedlichen Kontext beziehen. Bei den Aufgabenpaaren handelt es sich also jeweils um eine M- und eine P-Aufgabe zu einer bestimmten Transformation (s. z.B. Aufgabe 2bm und 2bp, Anhang 3.1)

2) Parallelaufgaben zur Erfassung von Inhaltsproblemen
   Aufgaben werden als "parallel" bezeichnet, wenn sie sich auf die gleiche Transformation, ähnliche Notation und Kontext, aber auf unterschiedliche Funktionstypen beziehen. Durch sie soll der Einfluß untergeordneter Aufgabenmerkmale auf die Anwendung der Transformationen untersucht werden (s. z.B Aufgaben 2am/2bm und 2ap/2bp, Anhang 3.1)

3) Problemaufgaben
   Zur Überprüfung des Transfers für Anwendungssituationen, die nicht mehr ausschließlich mithilfe einzelner, im Unterricht behandelter Algorithmen bewältigt werden können, wurden verschiedene Problemaufgaben verwendet (s. z.B. Aufgabe 13 und 14, Anhang 3.2).

4) Lernspiel

Der Transfer der im Unterricht gelernten Transformationen auf "offene" Anwendungssituationen in Physik wurde versucht, mit einem verzweigten Programm erfassen. Dabei wird eine Versuchsdurchführung mit Auswertung in verschiedenen Varianten simuliert, die Rückschlüsse auf die Strategie der Schüler in solchen Situationen ermöglichen sollten.

Bezüglich dieser Kriteriumsaufgaben wurden folgende Hypothesen über Behandlungsunterschiede zwischen Gruppe A und B aufgestellt:

H1 Bezüglich der Lösung von M-Aufgaben besteht kein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B.

Begründung: Die mathematischen Inhalte und die Lernmethode sind in beiden Gruppen gleich. Der Einfluß der anwendungsbezogenen Beispiele in der Einführungs-/Übungsphase (Gruppe A) auf das Lösen von M-Aufgaben kann:

1) positiv sein, wenn hierdurch eine Konkretisierung verdichteter mathematischer Schreibweise (Anschaulichkeit, bedeutungsvolles Lernen und Behalten) ermöglicht wird;
2) negativ sein, wenn die zu lernenden Algorithmen so komplex sind, daß sie nur mechanisch eingelernt werden können. In diesem Fall würde die einheitliche Notation und der Verzicht auf irrelevanten Kontext Gruppe B begünstigen.

H2 Bezüglich der Lösung von P-Aufgaben besteht ein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B zugunsten von A.

Begründung: Behandlung A berücksichtigt sowohl Notations- wie Kontextprobleme, die für P-Aufgaben relevant werden. Deshalb wird hier eine Überlegenheit der Gruppe A erwartet.

Allerdings ist auch ein negativer Einfluß für solche P-Aufgaben denkbar, bei denen die Fragestellung selbst sehr stark auf die Anwendung bestimmter Algorithmen hinweist. In diesem Fall können sich in Gruppe A durch die Berücksichtigung des irrelevanten Kontext erhöhte Schwierigkeiten in der Erkennung der mathematischen Fragestellung ergeben. Der positive Einfluß der Behandlung A sollte um so stärker werden, je offener die Aufgabensituation ist (also speziell bei Problemaufgaben, Lernspiel).

H3 Bezüglich isomorpher Aufgabenpaare bestehen signifikante Unterschiede im Schwierigkeitsgrad für Gruppe B, aber nicht für Gruppe A.

Begründung: Da Gruppe B nicht auf einen Notations- und Kontextwechsel vorbereitet wurde, wird eine erhebliche Störung des Lösungsverhaltens bei der P-Aufgabe eines isomorphen Aufgabenpaares in dieser Gruppe erwartet.

H4 Bezüglich Parallelaufgaben bestehen keine signifikanten Unterschiede im Schwierigkeitsgrad für beide Gruppen.

Begründung: Das Abgeschlossenheitsniveau (Gültigkeitsbereich) der Algorithmen wurde so gewählt, daß diese ohne Schwierigkeiten auf die in den Parallelaufgaben variierten Funktionstypen angewendet werden können. Eine Zurückweisung der Hypothese würde bedeuten, daß die Transformationen nur mangelhaft gelernt wurden oder andere untergeordnete Aufgabenvariable (wie z.B. Rechenoperationen) eine starke Rolle spielen.

H5 Bezüglich der Ergebnisse in den Problemaufgaben und im Lernspiel wird ein signifikanter Unterschied zugunsten der Gruppe A erwartet.

Begründung: Diese Aufgaben verlangen die Anwendung der gelernten Kenntnisse auf weitgehend "offene" Situationen, deren Fragestellungen nicht mehr eindeutig auf einen bestimmten Algorithmus hinweisen. Dadurch wird es notwendig, den Kontext der Aufgabe in hohem Maß zu berücksichtigen, was in Gruppe A an nichtphysikalischen Aufgaben mitgeübt wurde.

Zur Prüfung dieser Hypothesen müssen statistische Entscheidungskriterien (Prüfverfahren) herangezogen werden. Die Auswahl zulässiger Verfahren richtet sich nach dem Skalenniveau der Daten. Im vorliegenden Fall beziehen sich die Daten auf "richtige" oder "falsche" Aufgabenlösungen, so daß ein Nominalniveau angenommen wird (s. Anmerkung 5). Zulässige Transformationen (Statistiken) sind z.B. : Modalwert, Häufigkeit, Kontingenz-Koeffizient, Median. Zur Prüfung der Hypothesen können nur verteilungsfreie Verfahren angewendet werden: z.B. MC NEMAR-Test, Chi-Quadrattest).Ohne weitere Analyse der Ordnungsstruktur der Daten (z.B. mit dem GUTTMAN-Verfahren, s. Anmerkung 29) ist eine Zusammenfassung der Testwerte in den einzelnen Aufgaben zu einem Gesamttestwert nicht zulässig (s. ORTH, 1974, S.27:Tabelle zulässiger Transformationen bei Nominalniveau). Ebenfalls scheiden Verfahren aus,die sich auf die Analyse von Punktwertdifferenzen beziehen (z.B. Varianzanalysen, PEARSON-Korrelationen).

Zur Zurückweisung der Hypothesen werden Signifikanzniveaus p vorgegeben. Üblich in der psychologischen Forschung sind die Werte $p = 0.05$ und $p = 0.01$. Dabei bedeutet die Aussage

"Bezüglich der Testwerte zu Aufgabe A_i besteht bezüglich der Prüfgröße S ein signifikanter Unterschied für $p = 0.05$ zwischen den Gruppen A und B"

folgendes: Der Vergleich zweier Zufallsstichproben aus der Population P mit einer bestimmten Verteilung der Testwerte zu A_i liefert in 5% aller Vergleiche unendlich vieler Zufallsstichproben einen Wert S, der größer ist als in der untersuchten

Stichprobe A und B. Damit gilt die Hypothese von der Gleichheit der beiden Gruppen A und B bezüglich des betrachteten Merkmals als zurückgewiesen.
Hypothesen werden entweder als Nullhypothesen (ungerichtete Hypothesen, in denen kein Unterschied zwischen den Gruppen angenommen wird) oder als Alternativhypothesen (gerichtete Hypothesen, in denen die Richtung eines Unterschiedes zwischen den Gruppen angenommen wird) formuliert. Für die vorliegende Arbeit ist als wichtig anzumerken, daß bei Unterschieden im Sinne der Alternativhypothese durch einseitige Hypothesenprüfung sich ein niedrigeres Signifikanzniveau ergibt, als bei zweiseitiger Prüfung. Da die Hypothesen der Untersuchung sowohl zweiseitig (H1, H4) als auch einseitig (H2, H3, H5) entsprechend der Erwartung der Unterschiede formuliert wurden, würden gleiche Punktwertdifferenzen zwischen den Gruppen zu unterschiedlichen Signifikanzen führen. Zur einheitlicheren Interpretation der Signifikanzaussagen wurden deshalb auch für die einseitig formulierten Alternativhypothesen zweiseitige Prüfverfahren verwendet.
Die Problematik von Signifikanztests in der psychologischen Forschung, die im Widerspruch zu der zunehmenden Verwendung dieser Entscheidungskriterien in der Literatur steht, wird im Rahmen dieser Untersuchung keineswegs übersehen. Auf sie wird im Anhang 4.5 genauer eingegangen.

4.3 Versuchsplan

Die Untersuchung baut auf einem proaktiven Versuchsplan (s. Abschn. 2.1) auf, da der Kriterientest wegen mangelnder Vorkenntnisse als Pretest nicht verwendet werden konnte. Der proaktive Versuchsplan erfaßt den Einfluß der Behandlungen auf eine spätere Leistung in einem Posttest (Kriteriumstest):

Proaktiver Versuchsplan

Behandlung A ⟶ Test C

Behandlung B ⟶ Test C

Es wurde versucht, die für die vorliegende Untersuchung als relevant anzusehenden Fehlerquellen, über die in der Literatur berichtet werden, in der Versuchsanalge zu berücksichtigen (s. z.B. KLAUER (1974), S. 57-112; ROLLET (1974)):

A Versuchleitereffekt

Hierunter wird verstanden, daß der Versuchsleiter bewußt oder unbewußt durch sein Verhalten die Ergebnisse beeinflußt, indem er bei der Durchführung und Auswertung eine Gruppe begünstigt. Zur Vermeidung dieses Fehlers wurde versucht, sowohl die Durchführung als auch die Auswertung,soweit möglich,zu objektivieren:

1) Hierzu wurde ein Lehrpaket mit Lehrtext, Leitprogramm und Übungsprogramm für beide Gruppen entwickelt, das ein autonomes, weitgehend lehrerunabhängiges Lernen ermöglichen sollte.(Die Entwicklung des Lehrpakets war ein wichtiger Bestandteil der Arbeit!)

2) Die Testauswertung erfolgte mit einem vorher definierten Auswertschlüssel.

3) Die Auswahl der Lehrer für Gruppe A und B erfolgte nach Los.

B Stichprobeneffekte

Will man die Unterschiede in dem Kriterientest eindeutig auf die unterschiedliche Behandlung zurückführen, so muß gewährleistet sein, daß beide Gruppen zum Beginn der Behandlung sich nicht in den für den Lerneffekt relevanten Variablen signifikant unterscheiden. Wie schon in Abschn. 2.2 erwähnt, sind gesicherte Kenntnisse über relevante Variable eines definierten Lernprozesses noch unzureichend, so daß hier weitgehend intuitiv vorgegangen werden muß. Im Rahmen der vorliegenden Unter-

suchung wurde versucht, die Vergleichbarkeit der Gruppen durch folgende Maßnahmen zu gewährleisten:

1) Die Auswahl der untersuchten Klassen beschränkte sich jeweils auf zwei Parallelklassen einer Schule, deren Lehrer schon vor Beginn der Untersuchung in hohem Maße kooperieren sollten (gemeinsame Vorbereitung, Klassenarbeiten, Lehrbücher). Durch die Beschränkung auf Parallelklassen sollten gleichzeitig auch die Variablen Milieu, Schultyp, Standort konstant gehalten werden.

2) Für die Parallelisierung wurden weitere Variable kontrolliert, für die ein Zusammenhang mit dem Lernerfolg vermutet wurde: Noten in Mathematik, Physik, Deutsch, Geschlecht, verständiges Lesen, IQ, Vorkenntnisse in Mathematik.
   Inwieweit diese Variablen die für das Lernen nach Lehrtexten relevanten Aspekte erfassen können, war vor Beginn der Untersuchung unklar. Deshalb wurde zusätzlich eine Arbeitsprobe (Inhalt: Aussagenlogik) als Vortest verwendet, die alle wichtigen Aktivitäten des nachfolgenden Lernens nach Lehrtexten (z.B. verständiges Lesen von Mathematiktexten, Diskussion, Hausaufgaben machen, Anwenden der Grundrechenarten usw.) einschloß.
   Bis auf die Ergebnisse der Arbeitsprobe wurden die obigen Variablen zur Auswahl einer Parallelstichprobe aus der untersuchten Population herangezogen, wobei für jeden Schüler einer Gruppe ein in den kontrollierten Variablen ähnlicher Schüler der anderen Gruppe bestimmt wurde (Bildung von matched pairs).

C Weitere Störfaktoren

Neben dem Versuchleitereffekt sind weitere nicht ohne weiteres kontrollierbare Einflüsse während des Versuchs zu berücksichtigen, die sich dem intendierten Behandlungseffekt überlagern können: z.B. Lehrerpersönlichkeit, Zuwendungseffekte, Klassengröße, Unterrichtausfall, Belastung der Schüler durch vorausgegangenen Unterricht etc. Es wurde angenommen, daß diese zufälligen Störfaktoren bei den untersuchten 8 Klassen keine Gruppe systematisch benachteiligte. Für die Hypothesenprüfung sind sie

aber trotzdem entscheidend, da nur solche Behandlungsunterschiede nachgewiesen werden können, die sich von dieser Fehlervarianz abheben.

Unter Berücksichtigung der Vorkenntnistests und der Kriterientests war folgender Versuchsablauf geplant:

Vorkenntnis-tests	Behandlung Teil I	Test I	Behandlung Teil II	Test II	Mathematikunterricht	Lernspiel
3 Std.	14 Std.	2 Std.	8 Std.	2 Std.	3 Std.	1 Std.

← ca. 1o Wochen →

Erläuterung:

1) Zu Beginn der Untersuchung sollten verschiedene Vorkenntnistests zur Parallelisierung der Gruppen geschrieben werden.
2) Danach wurde zuerst Teil I des Lehrtextes durchgearbeitet, der sich auf die Transformation analytische Darstellung → Wertetabelle → Graph bezog und mit der Bearbeitung von Test I abschloß. Die Aufspaltung der Behandlung in Teil I und Teil II war notwendig, da der Kriterientest wegen seiner Länge nicht auf einmal bearbeitet werden konnte.
3) Behandlung von Teil II des Lehrtextes, bei dem die Bestimmung von Funktionsgleichungen linearer Funktionen aus Wertetabellen und Graphen geübt wurde. Abschluß der Behandlung mit Test II.
4) Nach 14 Tagen Lehrerunterricht in Mathematik wurde danach im Rahmen des Physikunterrichts ein weiterer Test (Lernspiel) bearbeitet.

Die Entwicklung der Untersuchungsmaterialien

Die Untersuchungsmaterialien bestanden aus den Lehrmaterialien, den Materialien zur Kontrolle der Behandlungseffekte und zur Erfassung der Vorkenntnisse. Sie mußten weitgehend selbst hergestellt werden, da die üblichen Materialien auf die zu untersuchenden Effekte nicht konsequent eingingen. Ihre Entwicklung stellt einen wesentlichen Anteil der vorliegenden Arbeit dar(s. Anlagen).

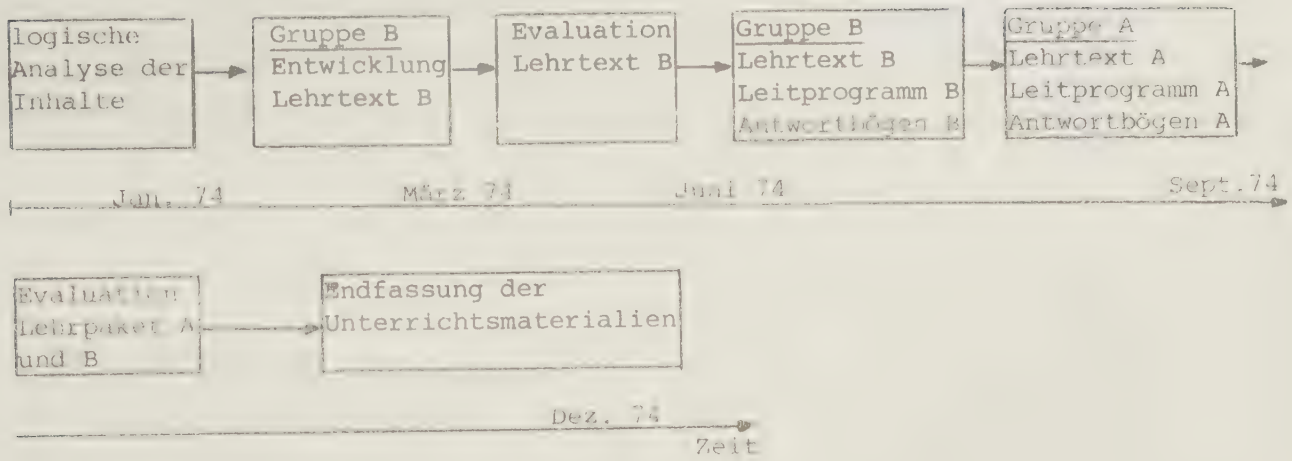
Tabelle der Materialien:

1) Untersuchungsmaterialien:
   Lehrtext A und B
   Leitprogramm mit Antwortbögen A und B
2) Materialien zur Kontrolle der Behandlungseffekte:
   Testaufgaben
   Lernspiel
   Einstellung zu den Testaufgaben und Lehrmethode
3) Materialien zur Kontrolle der Vorkenntnisse:
   Figürliches Denken (FRT)
   Verständiges Lesen (VL 7-9)
   mathematischer Vorkenntnistest (V1 - V4)
   Lese-Lerntest (LLT)

5.1 Entwicklung und Darstellung der Unterrichtsmaterialien

Aufgrund der Überlegungen zur Anwendungsproblematik (s. Abschn. 2.2), den Ergebnissen der Inhaltsanalyse (s. Abschn. 3.2) und methodischen Überlegungen zur Kontrolle des Versuchsleitereffekts (s. Absch.4.3) ergab sich die Notwendigkeit, Selbstinstruktionsmaterial für Schüler der 8. oder 9. Klasse zum selbstständigen Lernen herzustellen.
Besonders günstig erschien hierbei ein von WELTNER entwickeltes Konzept der leitprogrammgesteuerten Lernphase für die Entwicklung "autonomer" Lernfähigkeit (s. WELTNER, 1976). Das Konzept "autonomes Lernen" bedeutet nach WELTNER(1976, S.117) innengeregeltes Lernen, bei dem der Lerner ohne externe Steuerung (Lehrer, Lehrautomaten, Lehrprogramme) die Aufnahme von Information selbstständig regelt. Diese autonome Lernfähigkeit kann bei Schülern nicht ohne weiteres vorausgesetzt werden. Deshalb wurde ein Lehrpaket entwickelt, das mit Hilfe von Leitprogrammen das autonome Lernen nach für Schüler verständlichen Lehrtexten ermöglichen sollte. Schulbücher waren wegen ihrer knappen Darstellung hierfür ungeeignet.

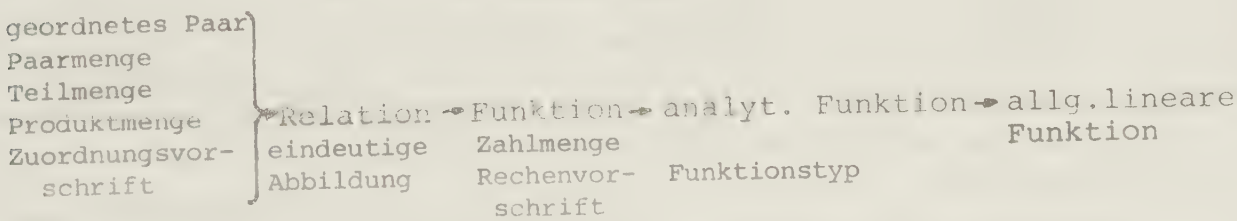
Zeitplan zur Entwicklung des Lehrpakets:



5.1.1 Logische Analyse der Darstellungsformen und Transformationen von Funktionen

Das Niveau der Lehrsequenz war so gewählt, daß der Schüler am Ende der Behandlung aus Wertetabellen (WT) oder Graphen (GR) die analytische Darstellung (AD) allgemein linearer Funktionen bestimmen können sollte (Begründung s. Kap. 3). Ein Verständnis für diese in der Physik wichtige Darstellungstransformation setzt die Behandlung des Relations- und Funktionsbegriffs und der verschiedenen Darstellungsformen voraus. In Vorgesprächen wurde festgestellt, daß man bei der Einführung dieser Inhalte mögichst wenig an speziellen Inhalten (z.B. Paarmenge, Grundmenge, usw.) voraussetzen sollte, wenn man Verständnisschwierigkeiten aufgrund mangelnder Vorkenntnisse vermeiden will. Als Voraussetzungen für die Einführung von zentralen Begriffen, Darstellungsformen und Transformationen zu allgemein linearen Funktionen wurden angenommen:

A Begriffe



B Darstellungsformen

Relationseigenschaften (größer/kleiner) (monoton) (konstant) (linear)	verbale Darstellung (VD)
Argument Funktionswert Bereich Formvariable Platzhalter Zuordnungsvorschrift (Rechenvorschrift) (Funktionsgleichung)	analytische Darstellung (AD)
geordnetes Paar Platzhalter Paarmenge	Wertetabelle (WT)
Pfeildiagramm Wertetabelle von Zahlmengen Koordinatensystem (Platzhalter, Maßstab, Ausschnitt) Punkte Kurve	Graph (GR)

C Transformationen

Darstellungstransformationen zwischen zwei Darstellungen verlangen, daß vorher diese Darstellungen bekannt sind. Darüber hinaus sollten bei bestimmten Transformationen andere Darstellungen als Zwischenschritte verwendet werden, die die Umwandlung erleichtern. So ist für die Bestimmung der Analytischen Darstellung aus Wertetabellen die Erkennung des Funktionstyps wichtig, die am ehesten am Graphen gelingt (WT $\rightarrow$ GR $\rightarrow$ AD). Ähnliches gilt für die Transformation WT $\rightarrow$ VD, bei der die Kenntnis des Graphen ebenfalls hilfreich ist.

Bisher nicht erwähnt sind Voraussetzungen, die für Transformationen notwendig sind, bei denen die analytische Darstellung allgemeiner linearer Funktionen ((WT, GR) $\rightarrow$ AD) bestimmt werden muß:

Funktionstyp allgemeine Funktionsgleichung Gleichung mit zwei Unbekannten geordnete Paare Steigungsformel Einsetzverfahren für die Bestimmung von a_o	(WT, GR) → AD

5.1.2 Entwicklung des Lehrtextes

Auf dem Hintergrund obiger logischer Analyse und der Randbedingung, daß die Sequenzierung der Inhalte wichtige Transformationen im Physikunterricht (WT → GR → AD) betont, wurde bis Mai 74 eine erste Version des Lehrtextes für die Gruppe B hergestellt (Umfang 60 Seiten).
Bei der Evaluation in einer 9. Klasse Gymnasium ergab sich:

1) Inhalte zu umfangreich, so daß inverse Funktionstypen (die oben nicht mehr berücksichtigt wurden) weggelassen werden mußten;
2) Wichtige Voraussetzungen für die Einführung von Relationen (siehe Abschn. 5.1.1) waren nur unzulänglich vorhanden und mußten wiederholt werden.

Diese Ergebnisse wurden in einer Revision des Lehrtextes für Gruppe B (kurz: Lehrtext B) berücksichtigt, der nun einen Umfang von 50 Seiten hatte.

Ab Juni 74 wurde der anwendungsorientierte Lehrtext A aus dem Lehrtext B nach folgenden Kriterien entwickelt:

1) Beibehaltung der inhaltlichen Struktur; soweit möglich, sollten die Formulierungen des B-Textes in den Lehrtext A übernommen werden.
2) Im Sinne der Untersuchungshypothese wurden die mathematikimmanenten Beispiele in x-y-Notation, wie sie im Lehrtext B ausschließlich verwendet wurden, für Lehrtext A in nichtphysikalische, anwendungsbezogene Beispiele umgeschrieben, wobei die mathematische Struktur der Beispiele, soweit möglich, beibehalten wurde.

Dabei ergab sich das Problem, daß die Einführung und Erläuterung der anwendungsorientierten Beispiele zusätzliche Informationsteile verlangten, die den Umfang von Lehrtext A erheblich vergrößerten. Eine Erhöhung der Seitenzahl konnte aber nur in geringem Maße akzeptiert werden, wenn man die zeitliche Koordinierung beider Behandlungen aufrechterhalten wollte. Deshalb mußten teilweise mathematikimmanente Beispiele aus Lehrtext B übernommen werden, wobei lediglich die Notation verändert wurde.

Diese erste Fassung von Lehrtext A wurde mit zwei Schülern aus 9. Klassen und zwei Lehrern überarbeitet. Im Oktober 74 war Lehrtext A einsatzfähig.

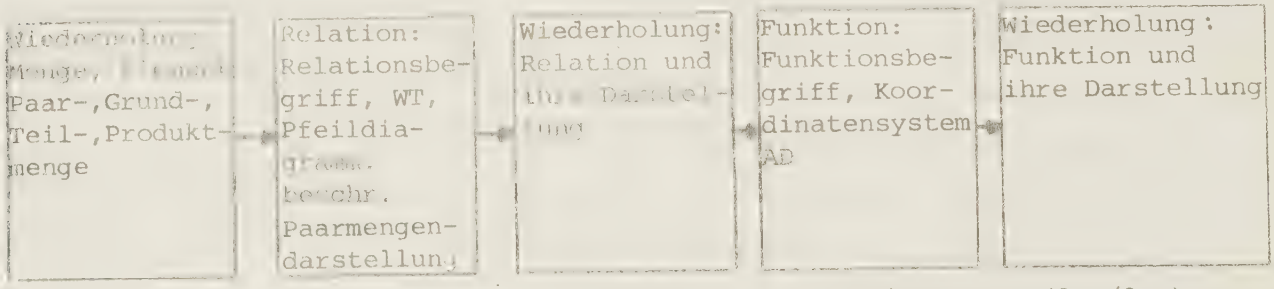
Beschreibung der Lehrtexte

A Gemeinsamkeiten von Lehrtext A und B

Die Lehrtexte sollten alle Information zur Erreichung der angestrebten Lehrziele enthalten, die normalerweise vom Lehrer vermittelt wird. Beide Texte bestanden aus zwei Teilen, die in Kapitel und Abschnitte (kleinste Lerneinheiten) eingeteilt waren.

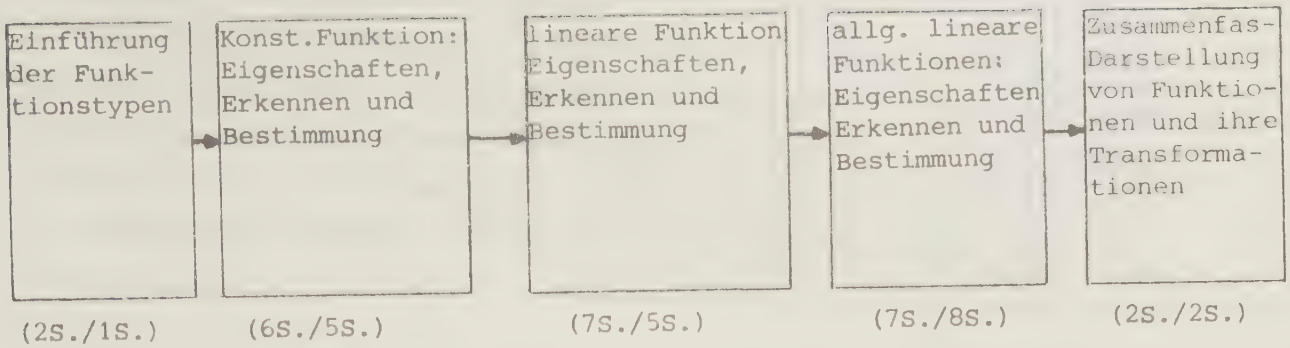
Teil I beschäftigte sich mit Relationen, Funktionen und ihren Darstellungen, Teil II mit allgemeinen linearen Funktionen und ihrer Bestimmung aus WT und GR (s. Anhang 2.1 und 2.2).

Inhalt Teil I (in Klammern jeweilige Seitenzahl für Text A/Text B):



(11S./6S.) (7S./5S.) (1S./1S.) (17S./15S.) (2S./2S.)

Inhalt Teil II:



Die mathematische Struktur der Demonstrationsbeispiele war in beiden Texten ähnlich. Die Beispiele dienten der Erläuterung folgender Transformationen:

von \ nach	VD	AD	WT	GR
VD			8	
AD	1		7	12
WT	1	6		4
GR		3		

Häufigkeit der Transformationen in den Lehrtexten A und B

Die Demonstrationsbeispiele bezogen sich auf folgende Funktionstypen:

Konstante Funktion :	7mal
lineare Funktion :	7mal
allg.lineare Funktion:	7mal
anderer Funktionstyp:	10mal

Erläuterung: ■ entspricht Transformationen in Physikbüchern (s.3.2)

Ein Vergleich der im Lehrtext vorkommenden Transformationen mit denen in Physikbüchern (s. Abschn. 3.2) zeigt, daß die Verbalisierung von Darstellungen (AD,WT → VD) und die Transformation VD → AD nur selten geübt werden. Ebenfalls nicht behandelt werden Operationen, die sich auf die Bestimmung von einzelnen Funktionswerten zu vorgegebenem Argument beziehen (diese Operationen wurden in obiger Matrix deshalb weggelassen). Diese Einschränkung auf die m.E. für die Physik wesentlichen Transformationen WT → GR → AD (Algebraisierung von Meßergebnissen) und AD → WT → GR (Vorhersage von Ereignissen) ergab sich aus den zeitlichen Randbedingungen in den HRRM.

Der Lehrtext A hatte einen Umfang von 62 Seiten, Lehrtext B von 50 Seiten, so daß für Gruppe A eine erhöhte Leseleistung von ca. 25% hingenommen werden mußte.

B Unterschiede zwischen Lehrtext A und B

Während im Lehrtext B alle Demonstrationsbeispiele auf mathematikimmanente Situationen (Zusammenhänge zwischen Zahlmengen) aufbauten, wurden im Lehrtext A, so weit möglich, anwendungsorientierte Aufgabensituationen berücksichtigt. Eine Übersicht über die in den Beispielen verwendete Notation und Kontext für Lehrtext A gibt folgende Tabelle:

Lehrtext A Teil	I	II
x-y-Notation	3	10
andere Platzhalter (z.B. u/v)	5	–
Größen	16	8

Notation der Beispiele

Lehrtext A Teil	I	II
mathematischer Kontext	6	12
nichtmathematischer Kontext	16	8

Kontext der Beispiele

Die hohe Zahl der Beispiele in Teil II, die sich auf x-y-Notation bezogen, ergab sich durch die Einführung der linearen Funktionstypen in konventioneller Notation. Hier ebenfalls andere Platzhalter einzuführen, erschien pädagogisch nicht vertretbar, weil die Schüler nach der Untersuchung wieder mit konventioneller x-y-Notation arbeiten mußten.
Für ein Verständnis der Ergebnisse des Tests muß festgestellt werden, daß in Teil I ein Verhältnis von ~ 6/1, in Teil II nur von 1/1 zwischen Beispielen ohne/mit x-y-Notation in Lehrtext A vorlag.

..1.4 Entwicklung der Leitprogramme und der zugehörigen Antwortbögen

A Leitprogramm

Integrierende Leitprogramme, die von WELTNER[13] entwickelt wurden, sollen den Schülern das autonome Lernen nach Lehrtexten erleichtern. Im Rahmen vorliegender Unterrichtsmethode wurden ihnen folgende Funktionen übertragen, die normalerweise dem Lehrer zukommen:

1) Einteilung des Lehrtextes in Abschnitte, die zusammenhängend zu bearbeiten sind (autonome Studierphase).

2) Lenkung der Aufmerksamkeit auf zentrale Begriffe und Methoden durch Lernfragen (SCHMID/ZÖLLER (1972)). Diese Lernfragen sollten vor der Lesephase zur Kenntnis genommen und am Ende des Abschnitts beantwortet werden. Nach OERTER (1973) bewirkt diese externe Steuerung des Leseprozesses (Steuerung des Aufmerksamkeitsverlaufs) eine Unterbrechung spontaner Handlungsabfolgen, was zu einem stärker analytischen Vorgehen zwingt (s.S. 63).

3) Überprüfung des Lernfortschritts durch Übungsaufgaben. Neben den Verständnisfragen wurden Übungsaufgaben nach folgenden Kriterien konstruiert, wie sie in ähnlicher Form von MAYER/GREENO (1972) verwendet wurden:
   a) Identische Aufgaben (bezogen auf Lehrtext)
   b) Ähnliche Aufgaben, mit erhöhten Rechenschwierigkeiten (Grundrechenarten bezüglich $\mathbb{Q}$), die einer Verbesserung der in den Vorversuchen als unzureichend angesehenen Rechenfertigkeiten dienen sollten, wie sie für Physik wichtig erscheinen.
   c) Transferaufgaben, die sich auf nichtbehandelte Fragestellungen bezogen.
   d) Offene Aufgaben, bei denen der Schüler sich selbst eine Aufgabe zu vorgegebenem Typ überlegen und lösen mußte. Damit soll der Schüler die Konstruierbarkeit von Aufgaben erleben, was für die selbständige Kontrolle erworbener Kenntnisse wichtig ist. Weiterhin soll er erkennen, welche Aufgabenmerkmale für die Lösung des vorgegebenen Aufgabentyps wichtig sind.

4) Hinweis auf Arbeitstechniken (z.B. Fragen aufschreiben), besondere Schwierigkeiten, Vorbereitung auf neue Inhalte.

Die Leitprogramme (s. Anhang 2.3 und 2.4) unterschieden sich für beide Behandlungen entsprechend den Hypothesen. Wiederum wurde zuerst das Leitprogramm B und daraus das Leitprogramm A nach den gleichen Kriterien wie für die Lehrtexte entwickelt; d.h. es wurden die mathematikimmanenten Aufgaben im Leitprogramm B auf nichtphysikalische, anwendungsbezogene Aufgaben für Leitprogramm A umgeschrieben.

B Antwortbögen

Für die schriftlichen Äußerungen der Schüler wurde ein Antwortbogen entwickelt (s. Anhang 2.5;2.6).In ihm konnte der Schüler seine Fragen zum Lehrtext und seine Ergebnisse zu den Übungsaufgaben festhalten. Erhebliche Schwierigkeiten bereitete eine schnelle Rückkoppelung der Schüler. In den Vorversuchen bestanden die Antwortbögen aus Einzelblättern, die die Schüler abgaben und zur nächsten Stunde korrigiert zusammen mit dem Lösungsblatt zurückerhielten.Dieses Verfahren hat sich nicht bewährt, da die "Zettelwirtschaft" von den Schülern und Lehrern beklagt wurde. Die Antwortbögen wurden deshalb zu einem Heft zusammengefaßt, wobei auf der Rückseite die Lösungen standen. Die Problematik des Abschreibens wurde sehr wohl gesehen, wurde aber zugunsten einer schnellen Verstärkung richtiger Lösungen in Kauf genommen.
Die Einstellung der Schüler zum Lernen nach Lehrtexten wurde im Antwortbogen durch zwei Einstellungsskalen am Anfang, in der Mitte und am Ende des Kurses kontrolliert.

5 Beschreibung der Leitprogramme

A Gemeinsamkeiten

Beide Leitprogramme enthielten die gleichen Verständnisfragen zu den Lehrinhalten, weitgehend Aufgaben mit ähnlicher mathematischer Struktur und des gleichen Typs (identische, ähnliche, Transfer-, offene Aufgaben). Von beiden Gruppen mußten 95 Aufgaben beantwortet werden, wobei sich etwa 50% auf Verständnisfragen zu Begriffen und Methoden bezogen. Bei den übrigen Übungen handelte es sich um Rechenaufgaben.
In den Rechenaufgaben zu neuen Inhalten (ab Kap. 3, Relationen) wurden folgende Transformationen geübt:

nach / von	VB	AD	WT	GR
VB		1	1	3
AD	2		7	15
WT		7		7
GR	1	19		

Häufigkeit der Transformationen
im Leitprogramm A und B

Die Übungen bezogen sich auf die Funktionstypen:

Konstante Funktion	:	14x
lineare Funktion	:	20x
allg. lineare Funktion	:	21x
inverse Funktion	:	2x
anderer Funktionstyp	:	10x

B Unterschiede

Beide Leitprogramme unterscheiden sich in der Einteilung der Lernabschnitte/Übungsaufgaben und der Art der Übungsaufgaben:

1) Die Einteilung der Lernabschnitte in zusammenhängende Blöcke mußte wegen des längeren Lehrtextes A in Gruppe A anders erfolgen als in Gruppe B. Im Mittel mußten in Gruppe A 20 Abschnitte à 3.1±1.1 Seiten, in Gruppe B 15 Abschnitte à 3.4±1 Seiten behandelt werden. Der zeitliche Mehrbedarf von Gruppe A wurde durch eine Verlangsamung des Tempos in Gruppe B gedeckt.

2) Durch die Einteilung der Lernabschnitte wird die Einteilung der Übungsaufgaben mit betroffen. Im Mittel mußte Gruppe A 4.8±3.6 Aufgaben, Gruppe B 6.3±3.7 Aufgaben pro Abschnitt bearbeiten.

3) Entsprechend den Hypothesen wurde in den Aufgaben des Leitprogramms A Notationsänderungen und nichtmathematischer Kontext berücksichtigt. Die Rechenaufgaben (Anzahl 54) zu Teil I und II bezogen sich in Gruppe A auf folgende Notation:

	Teil I	Teil II
x-y-Notation	5	5
andere Platzhalter (z.B. u/v)	[illegible]	8
Größen	13	20

Häufigkeit der Aufgaben in verschiedener Notation, Leitprogramm A für Teil I und II

5.2 Entwicklung und Beschreibung der Testaufgaben

5.2.1 Entwicklung der Testaufgaben

Der Auswahl der Testaufgaben lagen folgende Kriterien zugrunde:

1) Ergebnisse der Lehrplan-/Lehrbuchanalyse zum Physikunterricht
2) Inhalte in den Lehrtexten
3) methodische Überlegungen zur Untersuchung von Transfereffekten

Eine systematische Berücksichtigung aller Transformationen mußte von vorneherein ausgeschlossen werden, da die hierfür notwendige Aufgabenzahl die zeitliche Belastbarkeit der Schüler weit überschritten hätte[14]. In Voruntersuchungen mit 12. Klassen wurde festgestellt, daß für die Transformationsaufgaben vom Freiantworttyp im Mittel 7 min pro Aufgabe benötigt wurden. Bei einer maximalen Testzeit von 4 Schulstunden, wie sie von den befragten Lehrern für den Untersuchungszeitraum von ca. 6 Wochen gerade noch als vertretbar[15] angesehen wurde , sind höchstens 26 Freiantwortaufgaben bearbeitbar. Multiple-Choice-Aufgaben hätten zwar diese Zahl beträchtlich erhöht, aber weitgehend nur das Niveau der Wiedererkennung (threshold of recognition nach AUSUBEL (1974), S.114 und S.653) und nicht, wie bei Freiantworten, das Niveau der Verfügbarkeit erfaßt. Deshalb erschien dieser Aufgabentyp für die Untersuchung ungeeignet[16].

In der folgenden Matrix sind für die 9 Transformationen und Operationen ihre Häufigkeiten wiedergegeben, die im Test durch isomorphe Aufgabenpaare (M- und P-Aufgaben gleicher mathematischer Struktur) abgeprüft wurden:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WY/WX	VY/WX
VD				2		
AD			3	4		
WT	4+	2		4		
GR		4			8+	1+

Transformationen in isomorphen Aufgabenpaaren des Kriteriumstests

Erläuterungen:

VD : verbale Darstellung
AD : analytische Darstellung
WT : Wertetabelle
GR : Graph
WY,VY: zahlenmäßig oder verbal gekennzeichneter Funktionswert
WX : Argument
\+ : Zusatzaufgabe

Anmerkungen zur Auswahl der Aufgaben:

1) Zur Überprüfung grundlegender Transformationen des Physikunterrichts wurden sowohl isomorphe als auch parallele Aufgabenpaare verwendet. Als grundlegend wurden dabei angesehen:
   a) Algebraisierung physikalischer Phänomene im Sinne des Prozesses WT→GR→AD.
   b) Die Veranschaulichung algebraischer Zusammenhänge durch Graphen, die auf den Transformationen AD→WT→GR beruht

   Damit ergeben sich insgesamt 4 Transformationen, die vom Schüler sowohl einzeln, als auch im Zusammenhang gekonnt werden sollten. Da jede Transformation mit 4 Aufgaben überprüft wurden, ergeben sich hierfür 16 Aufgaben.

2) Für zwei weitere Transformationen VD → GR und WT → AD wurden jeweils nur isomorphe Aufgabenpaare (je 2 Aufgaben) eingesetzt.

3) Ein weiterer wichtiger Aufgabentyp bezieht sich auf die verbale Beschreibung von Zusammenhängen in Wertetabellen und Graphen und auf die Verwendung von Graphen zur Vorhersage von Ereignissen. Diese Aufgabentypen konnten wegen der zeitlichen Beschränkung nur in Zusatzaufgaben zu den im Punkt 1 und 2 aufgeführten Transformationen untersucht werden. Obwohl diese Abhängigkeit zwischen Aufgaben methodisch nicht ganz glücklich ist, wurde durch dieses Verfahren die Zeit für die Aufgabenbearbeitung stark verringert.

4) Die Problemaufgaben verlangten die Interpretation von Graphen (Erkennen von Filtereigenschaften und irrelevanten Parametern) und die Beschreibung eines Versuchsplans mit Auswertung.

Noch einige Bemerkungen zur Durchführung der Tests:

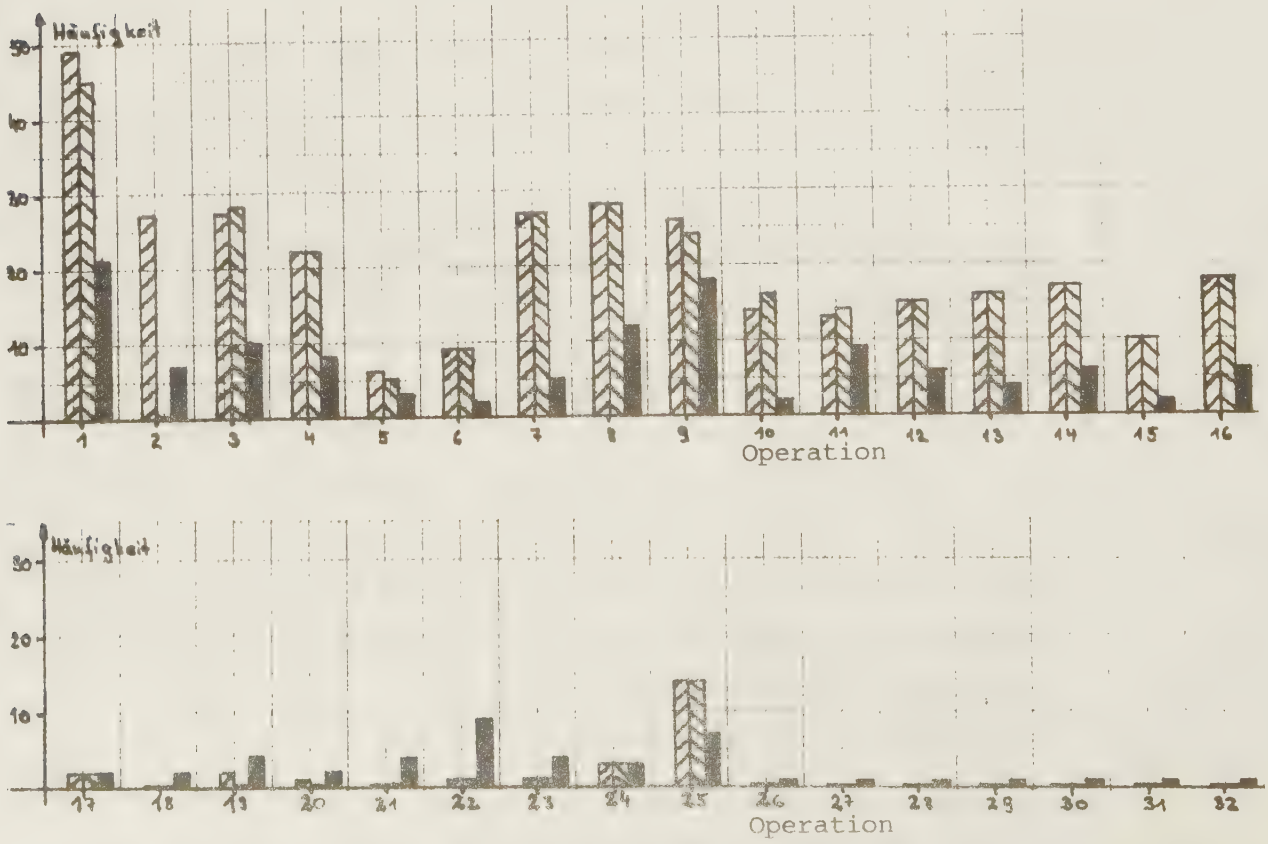
1) Der Test sollte als Niveautest durchgeführt werden (s. LIENERT (1961), S. 44), d.h. die Testzeit oder die Zahl der Testaufgaben ist der Leistungsfähigkeit der Schüler anzupassen. Da die Testzeit schon maximal war, konnte nur die Zahl der Aufgaben verringert werden, falls Aufgaben wegen Zeitmangels nicht bearbeitet würden.[46a]

2) Bei der Untersuchungsplanung war beabsichtigt, die P-Aufgaben im Physikunterricht bearbeiten zu lassen, da es um die Anwendung von Mathematik im Physikunterricht ging. Aus

rechtlichen, technischen und methodischen Gründen mußte dies für die Hauptuntersuchung aufgegeben werden. Deshalb wurde der Gesamttest in zwei Untertests I und II zerlegt, die in der Mitte und am Ende des Kurses im Mathematikunterricht geschrieben wurden.

5.2.2 Beschreibung der Aufgaben

Die im Test verwendeten Aufgaben sind im Anhang 3. (getrennt nach Teil I und II) wiedergegeben. Ihre Charakterisierung durch Transformationen läßt nur sehr grobe Strukturen erkennen und erfaßt keineswegs detailliertere Aufgabenschwierigkeiten, wie sie für eine Interpretation der Ergebnisse wichtig erscheinen. Deshalb wurde für jede Aufgabe die für den Lösungsprozeß notwendigen Operationsketten analysiert (s. Anhang 4.1). Die Liste der Operationen, die in den Aufgaben vorkommen, ist im Anhang 4.2 wiedergegeben[17].
Ein Vergleich der Häufigkeiten der Operationen in den Kriteriums- und den Übungsaufgaben des Leitprogramms ergibt folgendes Bild:



Häufigkeiten der Operationen in dem Leitprogramm A ▨ ; Leitprogramm B ▧ und dem Kriteriumstest ■

Daraus erkennt man, daß die Operationen 17 - 23 und 26 - 32 weniger als dreimal in den Übungen vorkamen, also praktisch nicht behandelt wurden. Deshalb wird in den Aufgabenteilen, in denen diese Operationen auftreten, weitreichender Transfer verlangt.
Vergleicht man die Operationen in den beiden Leitprogrammen miteinander, so ergeben sich nur geringe Unterschiede bis auf Operation 2, die die Berücksichtigung von Größeneinheiten verlangt. Im Sinne des Untersuchungsansatzes wurden in Gruppe B keine Zusammenhänge zwischen Größen behandelt.
Sowohl Transformationen als auch Operationen kennzeichnen zwar bestimmte Aufgabentypen, gehen aber nicht ein auf Merkmale wie Funktionstyp, Kontext und Rechenschwierigkeiten, wie sie bei JERMAN (1973; 1974), SEAREL et al. (1974) und HÄUSSLER (1975) erwähnt werden. Deshalb wurden folgende weitere Aufgabenmerkmale erfaßt (wegen genauerer Beschreibung s. Anhang 4.4):

A Funktionstyp (z.B. lineare Funktion)
B Kontext (z.B. physikalischer Kontext)
C Wortzahl der Fragestellung (z.B. 30 Wörter)
D Rechenoperationen (hier wurden grobe Schwierigkeitsgrade durch Gewichtung von Operationen nach der Formel in Anhang 4.4 berechnet.

Eine ausführliche Zusammenstellung der Aufgabenmerkmale aller Kriteriumsaufgaben ist in Tafel I (s. nächste Seite) angegeben. Zu den Häufigkeiten bestimmter Aufgabenmerkmale sei folgendes angemerkt:

1) Die Häufigkeit der einzelnen Funktionstypen in den Aufgaben ist:

	$y=a_o$	$y=a_1 \cdot x$	$y=a_1x+a_o$	$y=\frac{a_1}{x}$	$y=\frac{a_1}{x}+a_o$	$y=f(x)$
Häufigkeit	4	8	14	4	4	14

2) 27 Aufgaben bezogen sich auf physikalischen Kontext, wobei in 11 Fällen der physikalische Kontext als hilfreich für die Lösung angesehen wurde.

Tafel I: Zusammenstellung der Aufgabenkennzeichen

Aufgabe	Transformation	Aufgabenmerkmale A	B	C	D	Operation 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1bm	VD → GR	KF,F	X	49	-			x					x	x									x													
1bp	VD → GR	"	P	57	-			x					x	x									x													
2am	AD → WT	ALF	X	13	6	x		x	x	x																										
2amZ	WT → VD	"	X	1	-	x																				x										
2ap	AD → WT		A	63	9	x	x	x	x																											
2apZ	WT → VD	"	P	9	-	x																				x										
2bm	AD → WT	AIF	X	17	30	x		x	x	x																										
2bmZ	WT → VD	"	X	9	-	x																				x										
2bp	AD → WT	"	A	82	30	x	x	x	x	x																										
2bpZ	WT → VD	"	P	9	-	x																				x										
4am	WT → GR	F	X	12	-							x	x			x																				
4amZ	VY ∪ GR → WX	"	X	16	-																							x								
4ap	WT → GR	"	A	81	-							x	x			x																				
4apZ	VY ∪ GR → WX	"	A	12	-																							x								
4bm	WT → GR	"	X	13	-	x					x	x	x	x		x																				
4bmZ	GR → VD	"	X	11	-	x																			x											
4bp	WT → GR	"	A	33	-	x	x				x	x	x	x		x																				
4bpZ	GR → VD	"	P	13	-	x																			x											
5am	GR → VD	F	X	17	-	x																		x												
5apZ	GR → VD	"	P	103	-	x	x																	x							x					
5apZ	———	"	P	11	-																											x				
7bm	VY ∪ GR → WX	F	X	18	-									x														x								
7bp	VY ∪ GR → WX	"	A	45	-									x														x								
10am	AD → GR	LF	X	11	12			x	x				x			x																				
10amZ	WY ∪ GR → WX	"	X	11	-									x													x									
10ap	AD → GR	"	A	45	12			x	x				x	x		x																				
10apZ	WY ∪ GR → WX	"	A	10	-									x													x									
10bm	AD → GR	IF	X	11	8			x	x				x		x	x																				
10bmZ	WY ∪ GR → WX	"	X	11	-																						x									
10bp	AD → GR	"	A	105	8			x	x				x		x	x																				
10bpZ	WY ∪ GR → WX	"	A	9	-																						x									
11am	GR → AD	LF	X	26	36	x								x			x	x	x		x									x						
11amZ	WY ∪ GR → WX	"	X	9	-																						x									
11ap	GR → AD	"	A	41	36	x	x							x			x	x	x		x									x						
11apZ	WY ∪ GR → WX	"	A	11	-																						x									
11bm	GR → AD	ALF	X	19	69									x			x	x	x		x	x								x						
11bp	GR → AD	"	A	55	69									x			x	x	x		x	x								x						
12am	WT → AD	ALF	X	19	54									x			x		x	x	x								x	x						
12amZ	WY ∪ GR → WX	"	X	10	-									x													x									
12ap	WT → AD	"	A	53	54									x			x		x	x	x								x	x						
12apZ	WY ∪ GR → WX	"	A	9	-									x													x									
13p	———	F	P	60	-																			x								x				
13pZ	———	"	P	11	-																													x		
14p1	———	KF	P	122	-	x																													x	
14p2	GR → VD	KF	P	-	-																			x												
14pZ	WY ∪ GR → WX	F	P	-	-									x													x									
15p	———	-	P	52	-																														x	x
15m	———	-		-	-																								x	x						

Erläuterung:

zu Transformation
- VD: verbale Darstellung
- AD: analytische Darstellung
- WT: Wertetabelle
- GR: Graph
- WX: Argumentwert
- WY: Funktionswert
- VY: verbal gekennzeichneter Funktionswert

zu A: Funktionstyp
- KF: konstante Funktion
- LF: lineare Funktion
- ALF: allgemeine lineare Funktion
- IF: inverse Funktion
- AIF: allgemeine inverse Funktion
- F: anderer Funktionstyp

zu B: Kontext
- X: mathem. Kontext
- A: physikal. Kontext (nicht hilfreich für Lösung)
- P: physikal. Kontext (hilfreich für Lösung)

C: Wortzahl

D: Rechenschwierigkeit

s. Anh. 4.4

3) Die Wortzahl der Aufgabenstellungen war im Mittel für M-Aufgaben ($\mu = 16 \pm 9$) wesentlich kürzer als für P-Aufgaben ($\mu = 47 \pm 37$). Da nur in 11 Fällen (40% der P-Aufgaben) der Kontext hilfreich für die Lösung sein konnte, bedeutet die erhöhte Wortzahl in P-Aufgaben eine Zunahme der irrelevanten Information, von der der Schüler abstrahieren muß.

4) Die Werte für die Schwierigkeit der Rechenoperationen schwanken zwischen Wert 8 (Aufgabe 10bm/10bp) und Wert 69 (Aufgabe 11bm/11bp).

5.2.3 Entwicklung und Beschreibung des Lernspiels[18]

Die Entwicklung des Lernspiels erfolgte nach dem vorläufigen Abschluß der ersten Untersuchung. Dabei zeigte sich bei der Auswertung der Testaufgaben, daß sich die Gruppen nur sehr gering bezüglich der algorithmisch lösbaren Aufgaben unterschieden, wenn man die Notation nicht berücksichtigte. Um diesen Effekt auch gegen offene Aufgabensituationen abzusichern, war geplant, im Physikunterricht das Verhalten der Gruppe bezüglich Planung, Durchführung und Auswertung eines Experiments zu untersuchen. In Vorversuchen zeigte sich, daß der organisatorische Aufwand zur Kontrolle der Versuchsbedingungen und eine objektive Auswertung nicht geleistet werden konnte.

Als "Notlösung" wurde deshalb das Lernspiel (s. Anhang 3.3) konzipiert, bei dem

1) zu einem Problem (Bestimmung des Ballonvolumens zu vorgegebener Tragkraft) die Strategie (Versuchsplan - Auswertung) schriftlich wiedergegeben,

2) der algebraische Zusammenhang zwischen Gasvolumen und Auftriebskraft eines Ballons und

3) zu vorgegebenem Auftrieb das entsprechende Gasvolumen bestimmt werden sollte.

Zur Erfassung der Strategie der Schüler beim Lösen obiger Probleme mußten diese

1) nach Kenntnis der Fragestellung, aber noch vor Bearbeitung

des Lernspiels schriftlich darlegen, wie sie das Problem angehen würden

2) anhand eines verzweigten Programms, in dem verschiedene denkbare Vorgehensweisen mit entsprechenden Ergebnissen simuliert wurden, sich für bestimmte Wege entscheiden und diese auf dem Antwortbogen dokumentiern

3) die gesuchten Ergebnisse (Gesetz und Gasvolumen V) angeben.

Den Verzweigungen innerhalb des Lernspiels lassen sich dabei 3 Entscheidungsebenen zuordnen:

Ebene 1: Auswahl der Strategie zur Lösung des Problems oder zusätzlicher Hilfen (8 Verzweigungen)

Ebene 2: Wahl der Darstellungsform zur Bestimmung der Funktionsgleichung (3 Verzweigungen)

Ebene 3: Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen Gasvolumen und Auftriebskraft, anhand derer das gesuchte Gasvolumen bestimmt werden konnte. Damit war das Lösen von Frage 2 keine notwendige Voraussetzung für eine Antwort zu Frage 3.

Für die Auswertung war wichtig, den Lösungsweg der Schüler festzuhalten. Dies geschah durch einen Antwortbogen, auf dem die Schüler jeweils die einzelnen Stationen ihres Weges notieren sollten. Um zu verhindern, daß sich die Schüler unkontrolliert entsprechende Informationen beschaffen konnten (z.B. indem sie das Heft durchblätterten), waren alle Seiten vor Versuchsbeginn mit einem Deckblatt zugeklebt. Wollte der Schüler ein bestimmtes Blatt lesen, mußte er entsprechende Seiten auftrennen. Durch nachträgliche Kontrolle der geöffneten Seiten mit den Aufzeichnungen auf dem Antwortblatt konnten Täuschungen festgestellt werden.
Weiterhin wichtig anzumerken ist, daß dieses Lernspiel im Physikunterricht ohne jeden Notendruck durchgeführt wurde. Das Lernspiel testet demnach die Bereitschaft, mathematische Kenntnisse in einer offenen physikalischen Situation anzuwenden, falls sie dem Schüler bekannt sind.

5.2.4 Beschreibung der Verfahren zur Messung von Einstellungen

Neben kognitiven Variablen interessierte auch die subjektive Einstellung der Schüler zu den Testaufgaben und Lehrmethoden.

A Einstellung zu den Testaufgaben

In Voruntersuchungen wurde festgestellt, daß trotz richtiger Lösung von physikalischen Aufgaben diese als schwieriger beurteilt wurden und die Schüler sich ihrer Antwort wenig sicher waren. Da sich Behandlungsunterschiede zwischen den beiden Gruppen auch in diesen Einstellungen niederschlagen konnten, wurden die Kriterienaufgaben mit zwei Beurteilungsskalen versehen:

1) Schwierigkeitsskala: Nach dem Lesen des Aufgabentextes, aber vor der Bearbeitung sollten die Schüler angeben, wie schwer sie die Aufgabe einschätzten.

2) Sicherheitsskala: Nach Bearbeitung der Aufgabe sollten sie weiterhin angeben, wie sicher sie sich ihrer Lösung sind.

B Einstellung zum Lernen nach Lehrtexten

Zur Erfassung der zeitlichen Entwicklung der Einstellung zum Lernen nach Lehrtexten wurde

1) zu Anfang, Mitte und Ende der Lernphase die Beliebtheit des Unterrichts nach Lehrtexten in Relation zum Lehrerunterricht erfragt (s. Antwortbögen, Anhang 2.5 und 2.6)

2) nachdem die zweite Testarbeit mit der entsprechenden Bewertung zurückgegeben worden war, wurden 12 Fragen zur Veränderung der M-Note, Arbeitsbelastung, Lernleistung, Diskussionsmöglichkeit, Autonomie und Schwierigkeitsgrad durch die Lehrtextmethode gestellt. Als Vergleichsstandard wurde der vorangegangene Lehrerunterricht vorgegeben (s. Anhang 1.3)

5.3 Beschreibung der Materialien zur Kontrolle der Vorkenntnisse

Diese Materialien dienten zur Parallelisierung der Gruppen (s. Abschn. 4.3).

5.3.1 Figure Reasoning Test (FRT)

Der FRT-Test ist ein wortfreier Denktest im Sinne des RAVEN-Matrizentests, der mit den üblichen IQ-Tests hoch korreliert ($r \sim 0.9$ nach DANIELS (1967)). Er diente zur Kontrolle des g-Faktors, der in faktoranalytischen Untersuchungen zur mathematischen Begabung als wichtiger Faktor bestimmt wurde (siehe z.B. BOTTENBERG/MAIWALD (1972),S.15; AIKEN (1973),S.406).

5.3.2 Verständiges Lesen Test (VL 7-9)

Dieser Test ist der einzige deutschsprachige Test zur Prüfung der Fähigkeit zum sinnverstehenden Lesen bei Schülern im Alter von 13 - 15 Jahren. Er wurde allerdings für Hauptschüler entwickelt, so daß eine Normierung für Gymnasialschüler nicht vorliegt (ANGER et al. (1965)).

5.3.3 Mathematischer Vorkenntnistest (V1-V4)

Wie schon erwähnt, zeigte sich bei Voruntersuchungen, daß der Kriteriumstest wegen fehlender Kenntnisse kein valides Instrument zur Parallelisierung der Gruppen darstellte. Deshalb wurde ein Test zur Kontrolle elementarer Rechenfertigkeiten, Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten und drei Aufgaben aus dem Kriteriumstest entwickelt, der sich direkt auf die Anforderungen im Lehrtext bezog. Die 18 Aufgaben (s. Anhang 1.1) wurden zu 4 Subtests zusammengefaßt:

V1: Grundrechenarten mit ganzen Zahlen (1a,b,c,d,g,h)
V2: Grundrechenarten mit Dezimalzahlen (1e,f,i,k)
V3: Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten (2a,b,c)
V4: Darstellungstransformationen (3a,b,c)

5.3.4 Lese-Lern-Test (LLT)

Wie schon in Abschnitt 4.3 festgestellt, sind Stichprobenfehler nur schwer zu vermeiden, da man in der Regel die für den Lernprozeß relevanten Variablen nur unzureichend vorhersagen kann. In der Regel begnügt man sich mit relativ allgemeinen Kriterien (IQ, Lesetest usw.), deren Varianzaufklärung für spezifische Behandlungseffekte sehr gering ist (~ 25% - 36%). So ist z.B. bester Prediktor mathematischer Leistungen noch immer die vorausgegangene Mathematiknote (s. AIKEN (1973),S.408).

Diese Ergebnisse berechtigen zur Skepsis gegenüber der Bedeutung der Variablen FRT und VL 7-9, die sich auf sehr allgemeine kognitive Fähigkeiten beziehen. Bedenken richten sich z.B. gegen folgende Punkte:

1) Der FRT arbeitet mit bildlich dargestellten Strukturen, deren subjektive Ähnlichkeit zu den mathematischen Inhalten der Lehrtexte als gering angesehen wird.

2) Der VL 7-9 prüft Verständiges Lesen an Deutschtexten mit vielfältigen semantischen Bezügen zur Alltagserfahrung, während solche Beziehungen in den mathematischen Texten kaum angesprochen werden.

3) Durch den Lehrtextunterricht werden wichtige Variable des Lehrerunterrichts verändert (z.B. Einschränkung sprachlicher Vermittlung, Unterdrückung spontaner Äußerungen, Lehrerrolle, usw.), die von den Parallelisierungsvariablen nur unzureichend erfaßt werden.

Daraus resultiert die Entwicklung einer einstündigen Arbeitsprobe (genannt Lese-Lern-Test, s. Anhang 1.2), in der in einer begrenzten Lernsituation alle Arbeitstechniken für das Lernen nach Lehrtexten (Einführung, Stillesen, Fragen stellen, Erklären, Übungen, Hausaufgaben) eingingen.

Beschreibung des Lese-Lern-Tests (LLT)

Inhalt : Aussagenlogik (UND, ODER-Aussagen), die späteren Inhalten sehr ähnlich waren

Notation: x-y-Notation

Kontext : mathematischer Kontext

Umfang : 4 Seiten Text mit Übungen

Der Lernerfolg wurde in der darauffolgenden Unterrichtsstunde in einem Niveau-Test mit 8 Aufgaben abgeprüft (s. Anhang 1.2). Dabei lassen sich die Aufgaben in vier Gruppen einteilen:

a) 2 Aufgaben aus der Lernprozedur in x-y-Notation (trivialer Transfer)
b) 2 den Übungsaufgaben ähnliche Aufgaben in x-y-Notation (mathematikimmanenter Transfer)
c) 2 zu b isomorphe Aufgaben in anderer Notation, aber mathematischem Kontext (zur Bestimmung des Einflusses der Notation auf den Transfer)
d) 2 Aufgaben zu physikalischem Kontext (zur Bestimmung des Einflusses des Kontextes auf den Transfer)

Ähnlich wie bei den Aufgaben des Kriteriumstests mußten zu jeder Aufgabe zwei Einstellungsskalen bearbeitet werden (Schwierigkeit der Aufgabe und Sicherheit der Lösung).

Es wurde angenommen, daß durch die Testwerte zum LLT der Einfluß der Lehrmethode auf die Lerneffekte bezüglich der Kriteriumsaufgaben kontrolliert werden können.

6. Untersuchungsablauf

6.1 Durchführung der Untersuchung

6.1.1 Auswahl der Klassen

Zur Durchführung einer Untersuchung in einer Klasse wurde für Vortests, Lernphase, Kriterientests und das Lernspiel eine Zeit von etwa 30 Schulstunden (8 Wochen) benötigt.

Insgesamt konnten trotz großer Schwierigkeiten[18a] die Untersuchungen in 11 Klassen begonnen werden, die sich über den Zeitraum von Mai 1974 bis Juni 1975 erstreckten:

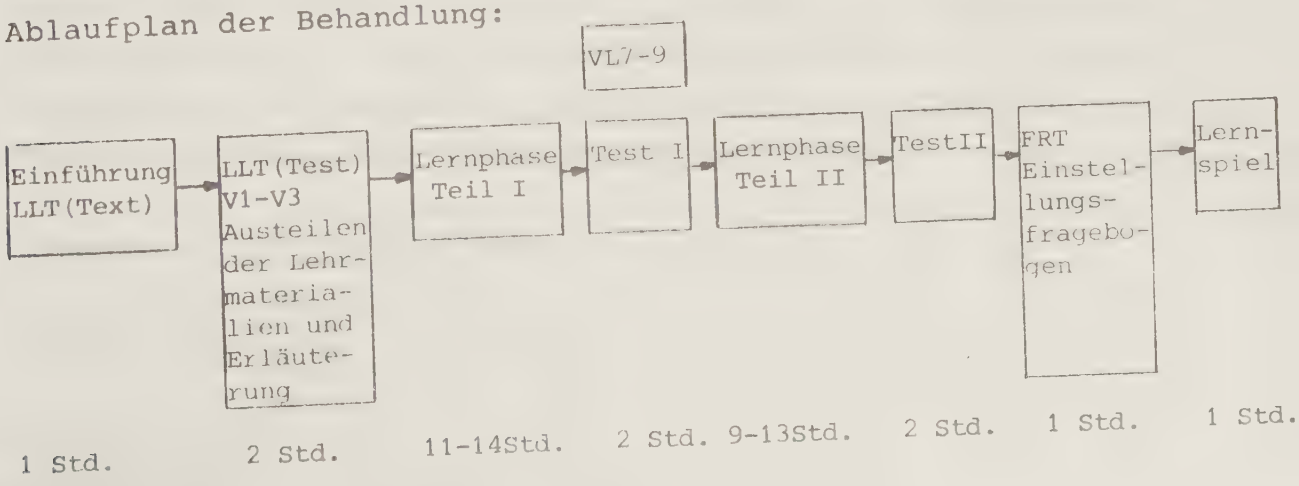
Gruppe	Behandlung	N	Klasse	Kurs	Schultyp	Schule	Untersuchungszeitraum +)	
	-	-	-	-	Gymnasium	Elisabethen	14.5.-18.6.	Vorversuch
	B	20	9					
I	A	21	9	A	Gesamtschule	Bockenheim Süd	14.10.-14.12.	
	B	19						
II	A	33	8	-	Gymnasium	Carl-Schurz	20.2.-20.5.	Hauptversuch
	B	34						
III	A	28	8	-	Gymnasium	Leibniz	10.4.-19.6.	
	B	28						
IV	A	18	8	A	Gesamtschule	Ernst-Reuter II	22.4.-18.6.	
	B	15						
V	A	22	8	B	Gesamtschule	Ernst-Reuter II		
	B	23						

+) einschließlich Ferien

Tabelle der untersuchten Klassen

6.1.2 Beschreibung eines Untersuchungsablaufes und auftretender Schwierigkeiten

Ablaufplan der Behandlung:



Erläuterung des Ablaufplans mit Schwierigkeiten:

In der ersten Stunde wurden die Schüler auf die ungewohnte Lehrmethode vorbereitet. Als Grund für diesen Methodenwechsel wurde ihnen erklärt, daß sie hierdurch an selbständiges Arbeiten mit Lehrtexten herangeführt werden sollten. Zur Einführung der neuen Arbeitstechnik wurde der Lese-Lern-Test (LLT) verwendet. Hieran wurde ihnen auch der prinzipielle Ablaufplan einer Unterrichtsstunde (Dreiphasenplan) erläutert:

	Diskussionsphase	Stillesephase	Diskussions- und Übungsphase
Lehrertätigkeit	Diskussionsleitung	Einzelberatung, Überwachung	Diskussionsleitung, Hausaufg. festlegen
Schülertätigkeit	Fragen zu Lehrtext/Übungen stellen und beantworten	Anhand des Leitprogramms neue Lehrtextinhalte erarbeiten. Fragen niederschreiben; Übungen beginnen.	Fragen stellen und antworten Hausaufgaben beginnen; falls notwendig, Abschnitt zu Ende lesen.
	ca. 1o min	ca. 2o min	ca. 15 min

Begründung:

Die Diskussionsphase (~10 min) zu Beginn des Unterrichts hatte die Funktion, die Konzentrationsschwierigkeiten nach der Pause durch erhöhte Schüleraktivitäten aufzufangen und so die Stillesephase vorzubereiten. Hier sollten Verständnisfragen der Schüler zum Lehrtext und den Übungsaufgaben behandelt werden. Die Rolle des Lehrers wurde in der Diskussionsleitung und Kontrolle der Hausaufgaben gesehen.

Die anschließende Stillesephase (~20 min) diente der Einzelarbeit. Mit Hilfe des Leitprogramms sollte sich der Schüler die vorgegebenen Abschnitte des Lehrtextes erarbeiten und Verständnisschwierigkeiten auf den Antwortbögen schriftlich niederlegen. Falls er vor Ende der Lesephase fertig war, konnte er mit den Übungen beginnen. Der Lehrer sollte hierbei für die notwendige Ruhe sorgen und in Einzelberatung Schwierigkeiten mit Inhalten und Arbeitstechniken beheben.

In der abschließenden dritten Phase (~15 min) wurden erneut die in der Lernphase aufgetretenen Probleme diskutiert. Es sollten die Hausaufgaben festgelegt und in der verbleibenden Zeit weitgehend fertiggestellt werden.

Nach Abschluß der Inhalte zu Teil I und deren Wiederholung wurde der Test I (zweistündig) geschrieben. Parallel dazu wurde im Deutschunterricht der VL 7-9 durchgeführt.

Danach sollte der Teil II bearbeitet werden, der mit Test II abschloß. Die darauffolgende Stunde wurde zur Durchführung des FRT und zur Beantwortung des Einstellungsfragebogens zum Lehrtextunterricht verwendet.

Nach etwa 14 Tagen, in denen im Mathematikunterricht keine Funktionsdarstellungen mehr behandelt wurden, wurde die Untersuchung mit dem Lernspiel beendet.

Es traten folgende Schwierigkeiten in den drei Phasen auf:

A Diskussionsphase (I)

1) Unterrichtsbeginn: Durch ständigen Klassenwechsel, zusätzlichen Verpflichtungen der Lehrer konnte der Unterricht erst 5 - 7 min später beginnen. Häufig brach er in Erwartung der Pause schon etwa 5 min früher ab.

2) Formulierung von Fragen: Der normale Unterricht basiert auf unmittelbarer verbaler Formulierung von Verständnisschwierigkeiten. Der Lehrtextunterricht verlangte aber die schriftliche Fixierung, was den Schülern besonders zu Beginn der Untersuchung sehr schwer fiel.
   Der Lehrer sollte hier vermittelnd eingreifen, indem er den Schülern half, ihre spontanen Fragen schriftlich niederzulegen.
   Insgesamt mußte aber festgestellt werden, daß nur ein geringer Teil der Schüler versuchte, ihre Einzelprobleme in den Unterricht einzubringen. Die übrigen Schüler verblieben weitgehend passiv oder äußerten generelle Schwierigkeiten wie "Ich verstehe überhaupt nichts" oder "Ich habe keine Lust, Mathematik zu machen".

3) Beantwortung von Fragen: Die Beantwortung der Fragen sollte, so weit möglich, durch die Schüler selbst erfolgen, wobei auf entsprechende Textstellen Bezug genommen werden sollte. Schwierigkeiten mit diesem Verfahren ergaben sich oft durch zu allgemeine Formulierungen der Fragen. Hier mußte der Lehrer eine Präzisierung der Schülerfragen veranlassen.

4) Hausaufgaben: Beabsichtigt war eine Kontrolle der Hausaufgaben. Viele Lehrer sind aber der Meinung, daß die Kontrolle der Selbstverantwortlichkeit der Schüler nicht förderlich sei. Hausaufgaben wurden deshalb nur durchgesprochen und Fragen dazu diskutiert. Insgesamt mußte aber festgestellt werden, daß viele Schüler nur sehr unregelmäßig ihre Aufgaben erle-

digten, teilweise durch einfaches Abschreiben des Lösungsblattes.

B Stillesephase (II)

1) Konzentrationsschwächen: Die Konzentrationsschwächen der Schüler waren ein entscheidender Faktor für die Schwierigkeiten in der Stillesephase. Über die Hälfte der Schüler waren nicht in der Lage, länger als 5 min (~1 Seite) still für sich zu arbeiten. Sie begannen mit dem Nachbarn zu reden, wodurch die noch lesenden Schüler sich gestört fühlten und ebenfalls redeten. So wurde öfters vorgebracht, man könne sich hier nicht konzentrieren und würde zu Hause lernen. Sehr oft wurde dann in der nächsten Stunde klargelegt, man hätte zu Hause nichts verstanden, da niemand die auftretenden Fragen beantworten könnte. Dieses Verhalten wurde sowohl bei guten wie auch bei schlechten Schülern (Mathematik-Note) festgestellt.
Bei großer Unruhe wurde deshalb die Lesephase kurz unterbrochen, Fragen diskutiert, auf Arbeitstechniken hingewiesen, um dann wieder weiterzumachen. Der Lehrer war in der ungewohnten Rolle, daß er zur Aufrechterhaltung der Stillesephase nur disziplinarische Aktivitäten entfalten konnte, was viele Lehrer und auch mich nicht gerade begeisterte. Ohne die einschränkenden Versuchsbedingungen hätte man wesentlich stärker auf diese Konzentrationsschwierigkeiten durch ständigen Methodenwechsel eingehen können.
Von dort her ist es verständlich, wenn gegen Ende der Untersuchung mancher Lehrer und Schüler den Lehrtextunterricht ablehnten, obwohl dessen Sinn nicht bestritten wurde.

2) Verständnisschwierigkeiten: Erhebliche Probleme bereiteten den Schülern der Aufschub ihrer Verständnisschwierigkeiten auf die Diskussionsphase. Um die Frustrationstoleranz der Schüler nicht zu sehr zu strapazieren, konnten sie den Lehrer durch Melden zu sich her holen. In den meisten Fällen handelte es sich um Fragen, die im Text wenig später erläutert wurden. Dies mußte der Lehrer dem Schüler nahebringen und ihn ermuntern, seine Fragen zu fixieren, und durch Weiterlesen festzustellen, ob sie im Laufe des Abschnitts beantwortet würden.

C Diskussionsphase (III)

1) Die Probleme, Fragen zu formulieren, traten hier ebenfalls auf.

2) Die Hausaufgaben sollten, so weit möglich, noch im Unterricht bearbeitet werden. Auch hier wurde von Schülern häufig angegeben, man könne diese besser in Ruhe zuhause machen. Ein Teil hatte sie dann auch wirklich zum nächsten Unterricht gemacht.

Neben diesen Schwierigkeiten, die sich beim LLT schon massiv andeuteten, ergaben sich weitere Probleme, auf die hier kurz hingewiesen werden soll:

1) Lehrerrolle
Die Lehrerrolle im Lehrtextunterricht bezog sich weitgehend auf Steuerungs- und Kontrollaktivitäten, und Vermittlung von Arbeitstechniken, während die Lehraktivitäten eingeschränkt werden mußten. Die Kritik der Schüler an dieser Lehrerrolle (wozu werden sie denn bezahlt?) brachte einzelne Lehrer in gewisse Konflikte. Die Kontrolle des Unterrichts durch den Versuchsleiter führte zwar immer wieder zur eigentlichen Behandlung zurück, bewirkte in manchen Klassen aber eine unterschwellige Solidarität der Lehrer mit den Schülern gegen den Versuchsleiter[19].
Hiermit in engem Zusammenhang steht eine m.E. ständige Unterforderung der Schüler durch einzelne Lehrer. So wurde festgestellt, daß die Schwierigkeiten der Aufgaben im Kriteriumstest von den meisten Lehrern als zu hoch eingeschätzt wurden. Gravierende elementare Rechenschwierigkeiten der Schüler (z.B. $\frac{2}{4} = 5$) wurden dagegen nur unzureichend gesehen.
Ebenfalls konnte wegen der zeitlichen Belastung der Lehrer eine ausführliche Vorbereitung auf den Unterricht nicht erfolgen. Die mangelnde Durchdringung der Intentionen des Lehrtextes führte in einer Klasse zu erheblichen Problemen[20].

2) Kontinuität des Unterrichts
Die Kontinuität des Unterrichts wurde durch Krankheit, Teilnahme an Fortbildungskursen, Konferenzen, andersweitigen Verpflichtungen, durch Ferien, Schüleraufenthalte häufig gestört. Dadurch verlängerte sich der Unterrichtszeitraum bis auf drei Monate. Für Gruppe IV ergaben sich hieraus solche

Verzögerungen, daß sie Test II nicht mehr bearbeiten konnte.

3) Zusammenarbeit der Schüler
Die Zusammenarbeit der Schüler während der Behandlungsphase wurde stark unterstützt. In Testsituationen mußte diese aber verhindert werden. Im Gegensatz zu Klassenarbeiten wurde dies durch das Ausweichen auf große Räume (Aula, Physiksaal) und durch Umstellung der Testaufgaben berücksichtigt. In allen Fällen wurde die Testbearbeitung durch den Versuchsleiter überwacht. Bei Zusammenarbeit während der Arbeit wurden diese Schüler in die Auswertung nicht einbezogen.

4) Eltern
Die Angst der Eltern, daß durch die Änderung der Lehrmethode eine Verschlechterung der Mathematiknote ihrer Kinder hervorgerufen würde, hat besonders in Gruppe II zu erheblichen Problemen geführt. In dieser Gruppe mußte der Versuchsleiter in beiden Klassen den erkrankten Lehrer während der gesamten Untersuchung vertreten. Der Referendarstatus in Verbindung mit den ungewohnten Anforderungen und der beschränkten Unterrichtszeit führte zu erheblichen Disziplinschwierigkeiten, die nur durch autoritäres Verhalten unterdrückt werden konnten. In zwei Elternabenden, in denen einzelne Eltern[21] sich über die Rolle der Schüler als "Versuchskaninchen" beklagten, mußte durch den Klassenlehrer und den Versuchsleiter die Ziele der Unterrichtsmethode einsichtig gemacht werden. In der anschließenden Abstimmung billigten die Eltern mit großer Mehrheit die Fortführung des Versuchs.

5) Behaltenstest
Es war beabsichtigt, nach etwa 6 Wochen einen Teil der Aufgaben als Behaltenstest nochmals bearbeiten zu lassen. Wegen methodischer Schwierigkeiten mußte dies aufgegeben werden:

a) In den 6 Wochen waren die Inhalte in den untersuchten Klassen sehr verschieden. In einigen Klassen wurde der Stoff fortgeführt, während andere zu Inhalten übergingen, die sich nicht mehr auf Funktionsdarstellungen bezogen.
b) Der Versuch, trotz dieser Unterschiede im nachfolgenden Lehrerunterricht den Behaltenstest in Gruppe I zu schreiben, scheiterte. Denn der Test konnte nicht mehr als Klassenarbeit gewertet werden, so daß eine mehr spielerische Arbeitssituation festzustellen war. Über 50% der Aufgaben

wurden erst gar nicht angefangen und Abschreiben konnte nicht verhindert werden. Deshalb mußten diese Testergebnisse bei der Auswertung unberücksichtigt bleiben. Von weiteren Untersuchungen der Behaltensleistung in anderen Klassen wurde Abstand genommen.

In Gruppe V waren die Schwierigkeiten mit dem Lehrtextlernen so groß, daß die Untersuchung in diesen Klassen abgebrochen wurde. Eine Begründung für dieses Versagen muß in den geringen Vorkenntnissen bezüglich Mathematik, aber auch allgemeinerer Fähigkeiten gesehen werden. Im einzelnen wurde festgestellt:

1) Völliges Versagen im Lese-Lern-Test, auch bei den Wiederholungsaufgaben
   (Fehlerprozente lagen für die einfachsten Aufgaben bei ~70% gegenüber 20% bei den übrigen Gruppen)
2) Die Rechenfehler in dem Vorkenntnistest V1 - V4 waren für schwierigere Aufgaben (Bruchrechnen) fast dreimal so häufig wie in den übrigen Gruppen.
3) Der Median für VL 7-9 lag mit 25 Punkten im Mittel um 12 Punkte niedriger als in den übrigen Gruppen.

Aus Zeitmangel konnte der Ausfall dieser Versuchsgruppe nicht durch eine weitere Untersuchung ausgeglichen werden. Deshalb wurde Gruppe I aus der Voruntersuchung in die Gesamtauswertung einbezogen, da sie unter weitgehend ähnlichen Bedingungen gearbeitet hatte.

Zusammenfassend muß festgestellt werden, daß trotz dieser Schwierigkeiten durch den hohen Aufwand an objektiviertem Material eine für Langzeituntersuchungen ausreichende Kontrolle der Behandlungseffekte angenommen werden kann.

6.2 Durchführung der Auswertung[22]

Bei der Auswertung wurde für alle Variablen zunächst Nominalskalenniveau angenommen. Deshalb wurden zur Hypothesenprüfung weitgehend verteilungsfreie Testverfahren angewendet.

Beschreibung des Auswertplanes mit Angabe der statistischen Verfahren und deren mögliche Ergebnisse:

Parallelisierung der Gruppen A und B

Die Parallelisierung der Gruppen A und B erfolgt durch Bildung von Schülerpaaren aus A und B, die bezüglich der kontrollierten Variablen möglichst ähnliche Ausprägungen haben sollen.
Verfahren: abgewandelte Clusteranalyse (s. Einführung bei VELDMAN (1972),S.308-317)
Ergebnis: Parallelgruppe

Prüfung der Güte der Parallelisierung

Die Clusteranalyse liefert möglichst ähnliche Paare, gewährleistet aber nicht automatisch eine ausreichende Güte der Parallelisierung. Deshalb wurden die Gruppenunterschiede statistisch geprüft.
Verfahren: Wilcoxon-Vorzeichenrangtest (s. SIEGEL (1976), S. 72-80)
Ergebnis: Güte der Parallelisierung

Deskription: V1 - V4 LLT

Neben der Parallelisierung diente der mathematische Vorkenntnistest mit den Subtests V1 - V4 der Analyse von Rechenschwierigkeiten, der Lese-Lern-Test LLT als Vorstudie zur Analyse der Schwierigkeiten in Aufgaben mit Notations- und Kontextwechsel.
Verfahren: Fehlerprozente, Median
Ergebnis: Schwierigkeiten mit bestimmten Aufgaben aus V1 - V4 und mit der Anwendung von Inhalten des LLT auf ähnliche Aufgabengruppen.

Deskription: Kriteriumaufgaben (Punktwerte)

Kodierung der Antworten zu den Aufgaben des Kriteriumtests I und II in Punktwerte mit Hilfe der Auswertungsanweisung. Beschreibung der Ergebnisse zu den einzelnen Aufgaben.
Verfahren: Fehlerprozente, Median
Ergebnis: Schwierigkeit der Transformation in den Aufgaben.

↓

Hypothesenprüfung 1-5

Die Hypothesen bezüglich der Behandlungsunterschiede in den Aufgaben zwischen den Gruppen A und B wurden

a) für alle Schüler der Parallelstichprobe
b) für Schüler, die in Mathematik eine schlechtere Note als 2 haben
c) für Schüler, die im Test zum LLT nicht zum oberen Drittel gehören

geprüft.
Verfahren: χ^2-Test (s. NIE et al. (1975), S. 218-245)
Ergebnis: Bestätigung der Hypothesen

↓

Deskription: Kriteriumaufgaben (Operationsfehler)

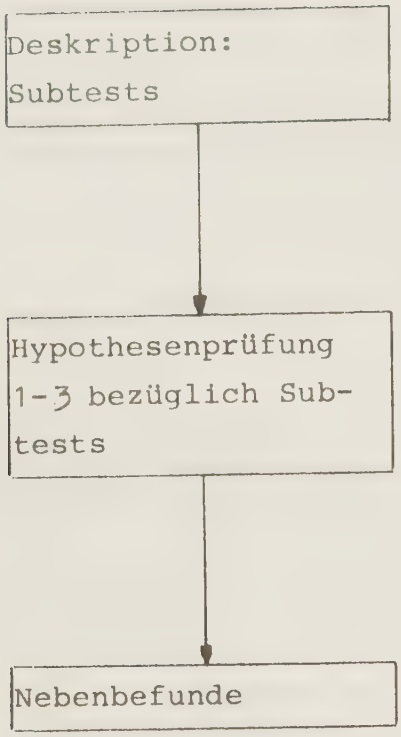
Neben der Punktauswertung wurde für eine Teilpopulation eine Feinanalyse der Operationsfehler in den Testaufgaben durchgeführt.
Verfahren: Fehlerprozente
Ergebnis: Zusammenhang zwischen der Schwierigkeit von Transformationen und einzelnen Operationen.

↓

Itemanalyse

Die Itemanalyse sollte feststellen, ob die Zusammenfassung von Aufgaben des Kriteriumtests zu Subtests berechtigt ist.
Verfahren: Clusteranalyse, Guttmanskala
Ergebnis: Bildung von Subtests

↓



Beschreibung der Ergebnisse zu den Subtests.
Verfahren: Fehlerprozente, Median
Ergebnis: Schwierigkeiten in den Subtests.

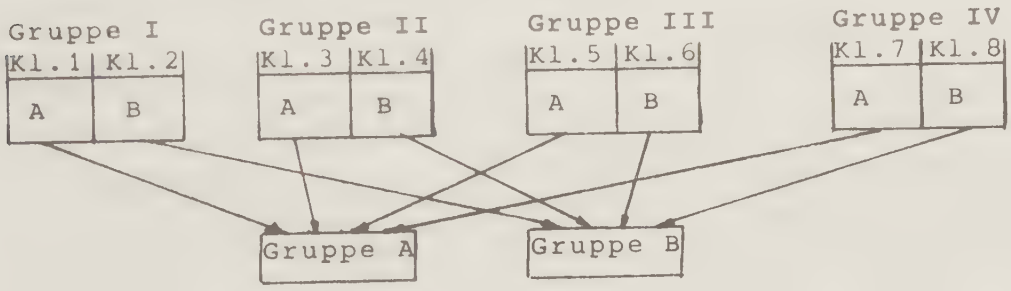
Die Hypothesen 1 - 3, die bezüglich der Aufgaben formuliert wurden, werden ebenfalls bezüglich der Subtests geprüft.
Verfahren: χ^2-Test
Ergebnis: Rückweisung der Nullhypothesen bezüglich der Subtests.

Weitere Ergebnisse, die sich auf Einstellungsfragen beziehen, werden mitgeteilt.
Verfahren: Median
Ergebnis: Unterschiede zwischen den Gruppen bezüglich Einstellungen.

7. Auswertung der Gesamtuntersuchung

7.1 Parallelisierung der Gruppen

An der Untersuchung haben 196 Schüler aus 8 Klassen teilgenommen, wobei von 185 Schülern die Ergebnisse zu beiden Kriteriumstests vorlagen. Diese 8 Klassen waren in 4 Gruppen (Gruppe I bis IV) organisiert, die jeweils aus je 2 Parallelklassen einer Schule bestanden. In jeder Gruppe wurde eine Klasse nach Behandlung A, die andere Klasse nach Behandlung B unterrichtet. Zur Vermeidung von Klasseneffekten sollte sich die Prüfung der Hypothesen auf alle Schüler der Gruppen I bis IV beziehen. Hierfür wurden zwei vergleichbare Gruppen A und B aus diesen Gruppen I bis IV entsprechend ihrer Behandlung gebildet:



Vergleichbare Stichproben A und B können durch paarweise Zusammenfassung von Schülern aus den einzelnen Gruppen I bis IV hergestellt werden, die sich in den kontrollierten Variablen Sex, Schule, letzte Mathematik-, Physik-, Deutsch-Note, Lesetest (VL 7-9), Figürliches Denken (FRT) und Vorkenntnistest (V1 - V3) möglichst ähnlich sein sollten.
Es wurde versucht, ein möglichst objektives Verfahren zur Paarbildung zu entwickeln, das sich an gängige Methoden der Parallelisierung (s. SIEGEL, 1976, S. 59-60) von kleinen Stichproben hält. Die Clusteranalyse[23] erschien für diese Paarbildung sehr geeignet. Allerdings mußte das Programm (s. VELDMAN, 1972, S. 3o8-317) so abgeändert werden, daß die gewünschte Paarbildung zwischen Schülern verschiedener Behandlungen erfolgte. Durch Standardisierung der Variablen wurde jedem Parallelisierungskriterium das gleiche Gewicht für die Ähnlichkeitsbestimmung zugeordnet. Das Abbruchkriterium wurde so festgelegt, daß aus jeder der Gruppen I - IV 2/3 aller Schüler jeder Gruppe berücksichtigt wurden. Die Parallelstichprobe umfaßte damit 122 Schüler.

Ein Vergleich der Mittelwerte und Standardabweichung für alle betrachteten Variablen zeigt, daß die Unterschiede zwischen der Gruppe A und B sehr gering sind:

	N	SEX[+)]	M	P	D	VL	FRT	V1	V2	V3
Gruppe A	61	25	3.0 ±0.8	2.0 ±0.9	3.3 ±0.7	37 ± 6	118 ± 8	6.7 ±1.4	2.3 ±1.3	2.2 ±0.9
Gruppe B	61	26	3.1 ±0.9	3.0 ±1.1	3.0 ±0.7	37 ± 5	113 ± 6	6.9 ±1.2	2.2 ±0.9	2.2 ±0.9

+) hier wurde der Prozentsatz für Mädchen angegeben

Erläuterungen: μ Mittelwert
$\pm\sigma$ Standardabweichung

N: Zahl d. Schüler
M: Mathematiknote
P: Physiknote
D: Deutschnote
VL: Lesetest
FRT: Figürliches Denken
V1-V3: math. Vorkenntnistest

Eine Signifikanzprüfung der Mittelwertsunterschiede bestätigte die Vergleichbarkeit der Gruppen A und B. Darüberhinaus wurden auch die parallelisisierten Untergruppen aus Gruppe I bis IV bezüglich signifikanter Unterschiede in den Variablen mit dem Wilcoxon- Vorzeichenrang-Test (s. SIEGEL, 1972, S. 72-80) für abhängige Stichproben geprüft.
Signifikante Unterschiede (p = o.o5) zwischen Schülern der Behandlung A und B ergaben sich in:

Gruppe I (N=2o): bezüglich FRT zugunsten der Behandlung B
Gruppe II (N=4o): keine Unterschied
Gruppe III(N=4o): bezüglich V1 zugunsten der Behandlung B;
bezüglich V2 zugunsten der Behandlung A
Gruppe IV (N=22): keine Unterschiede

Bis auf Gruppe I lassen sich auch in den Untergruppen keine erheblichen Benachteiligungen einer Behandlung erkennen. Deshalb wird sowohl für die Untergruppen als auch für die parallelisierte Gesamtstichprobe der Gruppen A und B eine hinreichende Vergleichbarkeit angenommen.

7.2 Wichtige Einzelergebnisse der Vorkenntnistests

7.2.1 Schwierigkeiten der Schüler bei elementaren Rechenoperationen

Der mathematische Vorkenntnistest (s. Anhang 1.1) erfüllte neben der Parallelisierung folgende weitere Funktionen:

1) Identifizierung von Rechenschwierigkeiten anhand der Fehlerprozente (Prozentzahl falscher Antworten; kurz FPr).

2) Validierung des Verfahrens zur Vorhersage von Rechenschwierigkeiten in den Kriteriumsaufgaben. Hierzu wurde die Rangkorrelation zwischen den empirisch bestimmten Fehlerprozentwerten FPr und den formalen Schwierigkeitsgraden SG (s. Anhang 4.4) bestimmt.

Ergebnisse:

1) Einfache Transformationsaufgaben im Sinne des Kriteriumstests (V4) lagen in ihrem FPr-Wert bei 90%, so daß praktisch keine Vorkenntnisse bezüglich Darstellungstransformationen angenommen werden können. Das bedeutet, daß die in den HRRM für die 7. Klasse vorgesehenen Inhalte entweder nicht gelernt oder schon wieder vergessen wurden. Der Subtest (V4) wird für die weitere Auswertung nicht mehr berücksichtigt.

2) Die Fehlerprozentwerte (FPr) und formale Schwierigkeitsgrade (SG) für die Subtests V1 - V3 sind:

	V1								V2				V3		
	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1k	1l	1g	1h	1i	1j	2a	2b	2c
FPr (%)	21	2	10	13	5	10	10	45	21	44	58	54	27	23	28
SG	6	3	12	8	6	8	12	36	10	20	32	32	16	21	16

□ FPr > 30%

Aufgaben mit FPr-Werten größer 30% (V2) erfordern die Division von rationalen oder ganzen Zahlen, was nur unzureichend gekonnt wird. Ebenfalls schwer fallen Gleichungen mit einer Unbekannten (V3), die in allen Klassen im letzten halben Jahr behandelt wurden. Da beide Operationen für die Darstellungstransformationen wichtig sind, deuten sich hier schon Schwierigkeiten mit den nachfolgenden Inhalten an.

3) Die Rangkorrelation (s. SIEGEL (1976), S.193-203) zwischen den FPr- und SG-Werten liegt mit $r = 0.87$ ausreichend hoch, so daß die Vorhersage von Rechenschwierigkeiten in den Kriteriumsaufgaben möglich erscheint.

7.2.2 Einfluß von Notations- und Kontextwechsel in den Aufgaben zum Lese-Lern-Test (LLT)

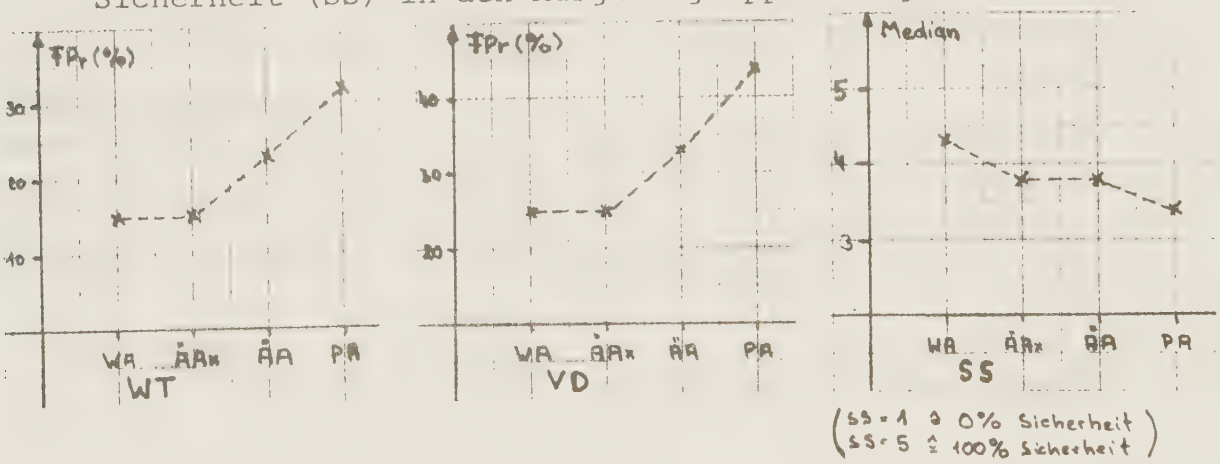
Die Aufgaben zum LLT waren in vier Gruppen eingeteilt (s. Anhang 1.2):

1) WA : Wiederholungsaufgaben in x-y-Notation
2) ÄAx : ähnliche Aufgaben in x-y-Notation
3) ÄA : zu ÄAx isomorphe Aufgaben in anderer Notation
4) PA : Aufgaben mit physikalischem Kontext

Jede Aufgabe verlangte die Aufstellung einer Wahrheitstafel (WT), die verbale Darstellung der Bedingungen (VD), für die die betrachtete Aussage wahr ist und die subjektive Einschätzung, wie sicher sich der Schüler seiner Lösung fühlt (subj. Sich. SS).

Ergebnisse:

1) Für die vier Aufgabentypen sind die mittleren FPr für jeden Aufgabentyp nach den Aufgabenteilen WT und VD getrennt wiedergegeben. Weiterhin werden die Mediane für die subjektive Sicherheit (SS) in den Aufgabengruppen mitgeteilt:



Der Trend in den FPr-Werten für WT und VD zeigt:

a) keine Schwierigkeitsunterschiede zwischen Wiederholungsaufgaben (WA) und ähnlichen Aufgaben (ÄAx) in x-y-Notation
b) deutliche Erhöhung des Schwierigkeitsgrades beim Übergang zu ungewohnter Notation (ÄA) und Aufgaben mit physikalischem Kontext (PA)
c) im Gegensatz zur objektiven Schwierigkeit(FPr-Werte) läßt sich ein Abfall der SS-Werte beim Übergang von Wiederholungsaufgaben (WA) zu ähnlichen Aufgaben in x-y-Notation (ÄAx) feststellen, während sich die Notationsänderung auf die SS-Werte nicht auswirkt.

2) Eine Analyse der Differenzen der FPr-Werte für alle Aufgaben ergab nach dem Wilcoxon-Vorzeichenrangtest keine signifikanten Unterschiede zwischen den Gruppen A und B.

3) Eine Bedingungsanalyse, die Zusammenhänge zwischen den Ergebnissen zum LLT und den kontrollierten Variablen M-Note, VL 7-9, FRT, und V1 - V3 aufzeigen sollte, wurde mit dem χ^2-Test durchgeführt. Hierzu wurde für jede Variable deren Ausprägungen auf drei Klassen reduziert (unteres, mittleres, oberes Drittel) und die Kontingenzkoeffizienten CC (Korrelationsmaß für Nominalskalen; s. SIEGEL (1976), S. 188-193) bestimmt. Um diese ähnlich einem Maßkorrelationskoeffizienten interpretieren zu können, wurde das r-Äquivalent r_{CC} (s. LIENERT (1961), S. 292) berechnet:

LLT mit	M-Note	VL 7-9	FRT	V1	V2	V3
r_{CC}	0.44	0.34	n.s.	n.s.	0.42	0.42

Signifikante r-Äquivalente r_{CC} für den Zusammenhang zwischen dem LLT und bestimmten kontrollierten Variablen

Es wurden signifikante Zusammenhänge des LLT mit der M-Note, dem Lesetest VL 7-9 und den Subtests V2 und V3 des mathematischen Vorkenntnistests festgestellt. Damit kann angenommen werden, daß der LLT ein valides Instrument zur Erfassung der Lese-Lernfähigkeit für mathematische Texte darstellt. Für den VL 7-9 konnte dagegen kein signifikanter Zusammenhang zur M-Note und dem mathematischen Vorkenntnistest (V1-V3) bestimmt werden; d.h: die durch diesen Test erfaßten Leistungen haben keinen Einfluß auf den Lernerfolg im lehrerabhängigen Mathematikunterricht.

7.3 Ergebnisse und Hypothesenprüfung bezüglich der Kriteriumsaufgaben

Zur Beschreibung der Testergebnisse wurden die Antworten der Schüler entsprechend der Auswertanweisung (s. Anhang 4.3) bestimmten Kategorien (Punktwerte) zugeordnet. Diese Punktwerte wurden anschließend für alle Aufgaben einheitlich in 4 Stufen nach folgender Regel umgewandelt:

Stufe 0: Aufgabe nicht bearbeitet oder Lösungsweg prinzipiell falsch.
(erreichter Punktwert $<$ 1o% von P_{max}+)

Stufe 1: Aufgabe prinzipiell richtig begonnen, aber falsch oder unvollständig weitergeführt
(1o% von P_{max} $\leq$ erreichter Punktwert $<$ 36% von P_{max})

Stufe 2: Aufgabe prinzipiell richtig bearbeitet, mit größeren Mängeln bei der Ausführung
(36% von P_{max} $\leq$ erreichter Punktwert $<$ 76% von P_{max})

Stufe 3: Aufgabe prinzipiell richtig bearbeitet, eventuell mit geringen Mängel bei der Ausführung
(76% von P_{max} $\leq$ erreichter Punktwert)

+ P_{max} entspricht dem maximal erreichbaren Punktwert in jeder Aufgabe (s. Anh. 4.3)

Diese vier Stufen[24], die in Zusammenarbeit mit den beteiligten Lehrern entwickelt wurden, berücksichtigen nur die für eine Lösung der Aufgaben als entscheidend anzusehenden Operationen. Nicht bewertet wurden Notationsfehler in den Aufgaben, da diese Fehler gegenüber der mathematischen Lösung als untergeordnet angesehen wurden. Untergeordnet deshalb, weil durch relativ kurzfristige Übung eine Vermeidung dieser Notationsfehler nicht ausgeschlossen werden kann.
Bei der nun folgenden Besprechung der Schwierigkeiten in den Aufgaben wird nur auf relativ grobe Fehler eingegangen. Eine detailliertere Analyse aller Operationsfehler in den Aufgaben erfolgt in Abschnitt 7.4.

7.3.1 Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse zu den Kriteriumsaufgaben

In der Tabelle sind die prozentualen Häufigkeiten bezüglich der Stufen 0 - 3, getrennt für Gruppe A und B und Test I und II wiedergegeben. Zum Verständnis des Aufgabentyps wurden jeweils die Transformation und wichtige Operationen (s. Anhang 4.2) mit aufgeführt. Zur Bestimmung der Fehlerprozente (FPr) wurden die Stufen 0 und 1 als falsch gewertet.

Ergebnis zu Test I:

			Gruppe A Häufigkeit (%) für Stufe					Gruppe B Häufigkeit (%) für Stufe				
Transformation	wichtige Operation	Aufg.	0	1	2	3	FPr	0	1	2	3	FPr
AD → WT	Rechenvorschrift interpretieren OP 4	2am	30	-	18	53	30	41	2	15	43	43
		2ap	16	-	-	84	16	18	3	2	77	21
		2bm	28	-	7	66	28	30	2	5	64	32
		2bp	26	5	18	51	31	34	2	15	49	36
WT → GR	Maßstab OP 7 Punkte zeichnen OP 8	4am	10	-	-	90	10	16	-	7	77	16
		4ap	13	-	3	84	13	16	-	2	82	16
		4bm	31	-	7	62	31	25	5	8	62	30
		4bp	36	-	10	54	36	28	-	3	69	28
AD → GR	Rechenvorschrift interpretieren OP 4 Punkte zeichnen OP 8	10am	33	-	5	62	33	31	2	15	53	33
		10ap	30	-	10	61	30	33	2	8	57	35
		10bm	25	-	12	64	25	26	2	7	66	28
		10bp	38	-	18	44	38	51	-	10	39	51
GR → VD	je-desto-Struktur zu Graph OP20	4bmZ	38	-	-	62	38	43	-	-	57	43
		4bpZ	56	-	-	44	56	57	-	-	43	57
WT → VD	Angabe einer je-desto-Struktur zu Wertetabelle OP21	2amZ	49	-	-	51	49	47	-	-	53	47
		2apZ	22	-	-	78	22	33	-	-	67	33
		2bmZ	16	-	-	84	16	24	-	-	77	24
		2bpZ	24	-	-	77	24	41	-	-	59	41
WY ∪ GR → WX	Argument zu Funktionswert ablesen OP22	10amZ	39	-	-	61	39	43	-	57	-	43
		10apZ	34	-	-	66	34	34	-	66	-	34
		10bmZ	36	-	-	64	36	44	-	56	-	44
		10bpZ	57	-	-	43	57	64	-	36	-	64
VY ∪ GR → WX	Argument zu verbal beschriebenem Funktionswert ablesen OP23	4amZ	15	-	-	85	15	25	-	-	75	25
		4apZ	16	-	-	84	16	28	-	-	72	28
		7bm	23	-	-	77	23	18	-	-	82	18
		7bp	28	-	-	72	28	23	-	-	77	23

▭ Fehlerprozent FPr größer als 30%

Zusammenfassung der Ergebnisse zu Test I:

1) Geringe Schwierigkeiten hatten beide Gruppen mit den im Unterricht ausführlich behandelten Transformationen AD → WT, WT → GR und AD → GR. Unterschiede zwischen den M- und P-Aufgaben sind nur für die isomorphen Aufgabenpaare 2am/2ap und 10bm/10bp feststellbar.
Der geringe Schwierigkeitsgrad von 2ap gegenüber 2am ist auf Rechenschwierigkeiten zurückzuführen. Der formale Schwierigkeitsgrad (s. Anhang 4.4) lag für 2am bei SG = 35 , für 2ap bei SG = 9 . Dagegen muß der Unterschied in 10bm/10bp mit dem längeren physikalischen Kontext (Wortzahl 105) von 10bp erklärt werden.
Ebenfalls geringe Schwierigkeiten bereitet die Angabe einer je-desto-Struktur für eine Wertetabelle (WT → VD) und das Ablesen des Arguments zu einem charakteristischen Funktionswert eines Graphen (VY ∪ GR → WX), was im Unterricht nicht explizit geübt wurde. Hier sind ebenfalls keine größeren Unterschiede zwischen M- und P-Aufgaben erkennbar.

2) Demgegenüber wurden die nicht geübten Transformationen, bei denen aus Graphen zu vorgegebenem Funktionswert das Argument (WY ∪ GR → WX) bestimmt werden sollte und die Angabe der je-desto-Struktur für Graphen (GR → VD) nur wenig beherrscht. Der im ersten Moment erstaunliche Unterschied zwischen den Schwierigkeiten zu WT → VD und GR → VD erklärt sich aus der Aufgabenform. Bei der Transformation WT → VD handelte es sich um Ergänzungsaufgaben, während bei GR → VD der Zusammenhang ohne entsprechende Hilfen formuliert werden mußte.
Für diese Transformationen ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen M- und P-Aufgaben (10bmZ/10bpZ, 2amZ/2apZ, 4bmZ/4bpZ).

Ergebnisse zu Test II[+]

Transformation	wichtige Operation	Aufg.	Gruppe A Häufigkeit (%) für Stufe 0	1	2	3	FPr	Gruppe B Häufigkeit (%) für Stufe 0	1	2	3	FPr
VD → GR	OP 8 OP18	1bm	6	6	30	56	12	18	10	12	60	28
		1bp	18	4	2	76	22	24	6	12	58	30
GR → VD	OP19	5am	7	-	53	40	7	10	3	60	27	13
		5ap	24	-	-	76	24	26	-	-	74	26
GR → AD	OP14	11am	14	28	2	56	42	8	10	2	80	18
	OP14	11ap	26	16	-	58	42	16	18	12	54	34
	OP14	11bm1	27	37	3	33	64	10	30	3	57	40
	OP14	11bp1	26	24	4	46	50	28	18	4	50	46
	OP17	11bm2	43	27	3	27	70	40	17	20	23	57
	OP17	11bp2	34	16	18	32	50	40	12	16	32	52
WT → AD	OP14	12am1	16	28	-	56	44	24	30	4	42	54
	OP14	12ap1	36	28	2	34	64	40	32	4	24	72
	OP15	12am2	34	22	-	44	56	40	12	-	48	52
	OP15	12ap2	50	6	-	44	56	46	14	6	34	60
WY ∪ GR → WX	OP22	11amZ	8	-	-	92	8	20	-	-	80	20
		11apZ	16	-	-	84	16	20	-	-	80	20
		12amZ	18	-	-	82	18	26	-	-	74	26
		12apZ	30	-	-	70	30	40	-	-	60	40
Problemaufgaben												
	OP27	5apZ	36	-	-	64	36	38	-	-	62	38
	OP28	13p	70	-	-	30	70	73	-	-	28	73
	OP29	13pZ	25	-	-	75	25	33	-	-	68	33
	OP30	14p1	18	-	-	82	18	50	-	-	50	50
GR → VD	OP19	14p2	43	-	-	58	43	55	-	-	45	55
WY ∪ GR → WX	OP22	14pZ	18	-	-	82	18	40	-	-	60	40
	OP31,OP32	15p	30	30	-	40	60	58	20	-	23	78
	OP24,OP25	15m	22	23	-	55	45	58	15	-	28	73

[+]Test II wurde von Gruppe IV nicht mitgeschrieben (s. Abschn. 6.1.2)

☐ Fehlerprozente FPr größer 30%

Zusammenfassung der Ergebnisse zu Test II:

1) Geringe Schwierigkeiten hatten beide Gruppen mit den nicht im Unterricht behandelten Transformationen VD → GR, WY ∪ GR → WX und GR → VD. Für die Transformationen GR → VD und WY ∪ GR → WX, die im Test I noch als schwierig erlebt wurden, sind deutliche Lerneffekte feststellbar.

2) Demgegenüber bereitet die Bestimmung der analytischen Darstellung aus Graphen und Wertetabellen erhebliche Schwierigkeiten in beiden Gruppen. Die höheren Fehlerprozente in Gruppe A sind z.T. darauf zurückzuführen, daß in dieser Gruppe mehr Schüler nur den Funktionstyp (Stufe 1) angegeben haben als in Gruppe B. Als Begründung hierfür werden von den Schülern unzureichende Kenntnisse bezüglich der Bestimmung der Steigung angeführt. Unterschiede zwischen M- und P-Aufgaben ergeben sich für 12am1/12ap1, 5am/5ap.

3) In Gruppe B bereiteten alle Problemaufgaben (5apZ, 13,14,15), in Gruppe A nur ein Teil größere Schwierigkeiten. Diese Aufgaben verlangten weitreichenden Transfer. Bedeutsam für den Physikunterricht ist, daß beide Gruppen trotz der Behandlung nicht in der Lage sind, einen einfachen Versuchsplan für die Untersuchung physikalischer Phänomene anzugeben. Darüber hinaus können über 70% der Schüler der Gruppe B das prinzipielle Vorgehen zur Bestimmung der analytischen Darstellung nicht richtig wiedergeben.

Einen groben Überblick über das Verfügungsniveau der Transformationen und Operationen bezüglich der Aufgaben beider Tests liefern die mittleren FPr-Werte zu jedem Aufgabentyp:

von \ nach	VD	AD	WT	GR	WY/WX	VY/WX
VD				+ / +		
AD			+ / o	o / o		
WT	+ / o	− / −		+ / +		
GR	o / o	− / o			+ / o	+ / +

Einzelaufg.: o / −

Erläuterungen:

+ : Mittelwert ≤ 3o%

o : 3o% < Mittelwert ≤ 4o%

− : 4o% < Mittelwert

A/B : Angabe in der linken Hälfte bezieht sich auf Gruppe A, in der rechten Hälfte auf Gruppe B

Tabelle: Verfügungsniveau der Transformationen und Operationen

Wegen detaillierterer Betrachtungen der Aufgabenfehler s. Absch.7.4

7.3.2 Prüfung der Hypothesen über Behandlungsunterschiede

Ziel der vorliegenden Untersuchung war es, die Überlegenheit eines anwendungsorientierten Lehrtextes für den Transfer mathematischer Kenntnisse auf physikalische Aufgabensituationen gegenüber einer mathematikimmanenten Behandlung nachzuweisen. Zur Prüfung der Hypothesen wurden Stufe 0 und 1 als falsch und Stufen 2 und 3 als richtig gewertet. Diese Zusammenfassung soll den Einfluß von Flüchtigkeitsfehlern, wie sie von Stufe 2 erfaßt werden, vernachlässigen, die bei den untersuchten Klassen (Kl.8 und 9) häufiger auftraten. Eine Reduzierung der vier Stufen auf zwei Stufen war auch deshalb notwendig, weil im Fall geringer Zellbesetzungen einzelner Zellen der Kreuztabellen sich die Anwendung des χ^2-Tests[25] verbietet (s. SIEGEL, 1976, S. 1o7).
Weiterhin muß noch einmal daraufhin gewiesen werden, daß eine Prüfung der Hypothesen wegen des Skalenniveaus der Daten (Nominal-Niveau) nur auf Aufgabenbasis zulässig erscheint (s. A. Abschnitt 4.2 und Anhang 4.5).

A Prüfung der Hypothese 1

Bezüglich der Lösung von M-Aufgaben wurde kein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B erwartet.

Ergebnisse: Annahme der Hypothese bezüglich 19 von 2Q M-Aufgaben. Zurückweisung der Hypothese lediglich für Aufgabe 11am zugunsten der Gruppe B. Hierin deutet sich eine Überlegenheit der Behandlung B für die Anwendung komplexer Algorithmen (Berechnung der Steigung, OP 14) in einfachsten M-Aufgaben an.
Die Unterlegenheit der Gruppe A bei dieser Aufgabe ist fast auschließlich auf die Unterschiede bezüglich Stufe 1 (s. Abschn. 7.3.1, Test II) zurückzuführen; d.h. Gruppe A hat wesentlich häufiger nur den Funktionstyp angegeben, ohne die Steigung a_1 zu berechnen. Diskussionen mit den Schülern beider Gruppen über die Testaufgaben ergaben:

1) In beiden Gruppen wurde der Steigungsalgorithmus nur sehr unsicher gelernt.
2) Die Übereinstimmung der Notation in der gelernten Steigungsformel ($a_1 = (y_1-y_2)/(x_2-x_1)$) und der Notation in den Übungsbeispielen der Gruppe B ermöglichte dieser in hohem Maße ein mechanisches Lernen und Anwenden dieses Verfahrens, was in Gruppe A wegen der veränderten Notation der Übungsbeispiele nicht so einfach möglich war.

Interessant war weiterhin die Frage, ob sich diese Ergebnisse auch dann reproduzieren, wenn man in beiden Gruppen jeweils das obere Leistungsdrittel der Schüler bezüglich der Mathematiknote (M-Note ≤ 2) und dem Lese-Lern-Test (LLT >12) bei der Auswertung nicht berücksichtigt. Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die FPr-Werte zu Aufgabe 11am für alle Schüler jeder Gruppe und für Schüler, die jeweils zum oberen Leistungsdrittel oder mittleren und unteren Leistungsdrittel bezüglich der Variablen M-Note und LLT gehören:

	alle S.	S. mit M ≤ 2	S. mit M > 2	S. mit LLT > 12	S. mit LLT ≤ 12
Gruppe A	42	21	5o	31	47
Gruppe B	18	6	24	15	18

FPr (%) für Aufgabe 11am

Wiederum ergibt sich ein signifikanter Unterschied in Aufgabe 11am für alle betrachteten Untergruppen. Dies bedeutet, daß diese Unterschiede nicht auf diese Variablen zurückgeführt werden können, so daß prinzipielle Behandlungseffekte für diese Aufgabe angenommen werden müssen. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, daß die Begünstigung des mechanischen Lernens in Gruppe B im Zusammenhang mit einer Überforderung durch diese Lernaufgabe die Anwendung der Steigungsformel auf einfachste M-Aufgaben erleichtert.

B Prüfung der Hypothese 2

Bezüglich der Lösung von P-Aufgaben wurde ein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B zugunsten Gruppe A erwartet.

Ergebnisse: Diese Hypothese konnte für keine der 2o zu den M-Aufgaben isomorphen P-Aufgaben bestätigt werden, wenn man Notationsfehler unberücksichtigt läßt. Dieses Ergebnis ist sehr überraschend und steht im Widerspruch zur angenommenen Hypothese der Transferwirksamkeit von Behandlung A. Diskussionen mit den Schülern beider Gruppen über die Aufgaben ergaben:

1. Die zeitliche Nähe isomorpher M- und P-Aufgaben erleichterte in hohem Maße die Wiedererkennung schon behandelter mathematischer Problemtypen und die Anwendung entsprechender Kenntnisse in P-Aufgaben, besonders für Gruppe B.
2. Unterstützt wurde diese Wiedererkennung des Problemtyps in P-Aufgaben weiterhin durch die Ähnlichkeit der Aufgabenmerkmale (Wertetabelle, Funktionsgleichung, Koordinatensystem) und durch Reizworte der Fragestellungen (z.B. "Berechne" "graphisch darstellen") mit entsprechenden Fragestellungen in M-Aufgaben. Deshalb habe sich der Kontext für diese Aufgaben nicht störend bemerkbar gemacht.

Daraus läßt sich der Schluß ziehen, daß der Transfer mathematischer Kenntnisse, gelernt an mathematikimmanenten Aufgabensituationen, auf Aufgaben im Physikunterricht keine Schwierigkeiten bereiten sollte, wenn den Schülern durch die Aufgabenmerkmale und Fragestellungen die Ähnlichkeit zu schon behandelten mathematischen Problemtypen aufgezeigt wird.

Eine Untersuchung des Einflusses der Mathematik-Note und der Ergebnisse zum LLT, wie sie bei der Prüfung der Hypothese 1 beschrieben wurde, konnten signifikante Unterschiede für die Aufgaben 2bpZ und 4apZ (Aufgaben bei denen der Kontext beachtet werden mußte) im Sinne der Hypothese 2 festgestellt werden. Daraus folgt, daß in Gruppe A Schüler im mittleren und unteren Leistungsdrittel bezüglich der Mathematik-Note geringere Schwierigkeiten mit dem Eingehen auf den Kontext dieser P-Aufgaben hatten, als Schüler der Gruppe B.

C Prüfung der Hypothese 3

Bezüglich isomorpher Aufgabenpaare wurden signifikante Unterschiede im Schwierigkeitsgrad in Gruppe B, nicht aber in Gruppe A angenommen.

Folgende Tabelle gibt einen Überblick über signifikante r-Äquivalente der Kontingenzkoeffizienten (r_{CC}; LIENERT, 1961, S.292) und signifikant schwerere M- oder P-Aufgaben (geprüft mit dem MCNEMAR-Test; s. SIEGEL, 1976, S. 6o-65), getrennt nach Gruppe A und B:

Hauptaufgaben:

		1b	2a++	2b	4a	4b	7b	10a	10b	11a	11b1	11b2	12a1	12a2
A	r_{CC}	n.s.	.40	.50	.48	.59	n.s.	.68	.78	.46	.73	n.s.	.71	.86
	McNemar	n.s.	M	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	P	n.s.	n.s.	n.s.	P	n.s.
B	r_{CC}	n.s.	n.s.	.41	.77	n.s.	n.s.	.50	.67	n.s.	.59	n.s.	n.s.	.66
	McNemar	n.s.	M	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	P	P	n.s.	n.s.	P	n.s.

Zusatzaufgaben:

		2aZ	2bZ	4aZ	4bZ		10aZ	10bZ	11aZ		12aZ
A	r_{CC}	n.s.	n.s.	.42	n.s.		.75	.50	+		n.s.
	McNemar	M	n.s.	n.s.	M		n.s.	P	n.s.		n.s.
B	r_{CC}	.45	n.s.	n.s.	n.s.		.69	.57	.64		.59
	McNemar	n.s.	P	n.s.	P		n.s.	P	n.s.		P

Erläuterung: Ein M in Zeile "McNemar" bedeutet: M-Aufgabe signifikant schwieriger als P-Aufgabe; entsprechend P : P-Aufgabe signifikant schwieriger als M-Aufgabe.

Die Abkürzung 1b steht für das Aufgabenpaar 1bm/1bp, 2b für 2bm/2bp usw.

+ nicht berechenbar, da zwei Zellen mit N=2 besetzt.

++Die Unterschiede für 2a sind weitgehend auf Unterschiede in den Rechenoperationen zurückzuführen. 2am verlangt Multiplikationen in Q, während für 2ap Multiplikationen in N durchzuführen sind.

Ergebnisse:

1) In Gruppe A treten für 6 von 21 Aufgabenteile signifikante Schwierigkeitsunterschiede für isomorphe Aufgabenpaare auf, wobei bei drei Aufgabengruppen (1ob, 12a1, 1obZ) die P-Aufgaben schwieriger sind.
In Gruppe B konnten für 8 Aufgabenteile signifikante Unterschiede festgestellt werden, die sich in 7 Fällen auf P-Aufgaben im Sinne der Hypothese beziehen. Die Unterschiede betreffen weitgehend Aufgaben, in denen noch nichtgeübte Transformationen (WT, GR $\rightarrow$ VD) und Operationen (WY $\cup$ GR $\rightarrow$ WX) oder komplexe Algorithmen (Steigungsberechnung) anzuwenden sind. Bemerkenswert festzustellen ist, daß die Behandlung A tendenziell zu höheren Schwierigkeiten bei M-Aufgaben in x-y-Notation führt. Dies läßt strukturelle Behandlungsunterschiede zwischen den Gruppen erkennen. Wegen einer ausführlicheren Analyse dieses Effekts siehe Abschnitt 7.4.

2) Die r_{cc}-Koeffizienten für die Hauptaufgaben wachsen in diesen Gruppen mit der Komplexität der Transformation an. Dabei liegen in 11 Fällen die r_{cc}-Werte der A-Gruppe über denen der B-Gruppe, in 5 Fällen ist es umgekehrt. Damit zeigt die A-Gruppe im Sinne der Hypothese 3 ein stabileres Verhalten gegenüber der Kontextvariation als Gruppe B.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Ergebnisse der Hypothese 3 teilweise widersprechen. D.h. der Gruppe A erwachsen bei einzelen P-Aufgaben ebenfalls erhöhte Schwierigkeiten, während Gruppe B durch den physikalischen Kontext nicht im angenommenen Maße gestört wird. Dieses Ergebnis steht im Zusammenhang mit den Ergebnissen zu Hypothese 2; d.h., die geringe Störung des Lösungsverhaltens in Gruppe B ergibt sich weitgehend aus der großen Ähnlichkeit isomorpher Aufgaben.

D Prüfung der Hypothese 4

Bezüglich Parallel-Aufgaben wurden keine signifikanten Unterschiede im Schwierigkeitsgrad für beide Gruppen erwartet.
Die Prüfung dieser Hypothese erfolgt ähnlich wie bei Hypothese 3.

Eine zusammenfassende Darstellung der r_{CC}- Koeffizienten und signifikant schwererer Parallelaufgaben gibt folgende Tabelle wieder:

Hauptaufgaben

		2m	2p+	4m	4p	10m	10p	11m	11p
A	r_{CC}	n.s.	.50	n.s.	n.s.	.44	.51	.61	.60
	McNemar	n.s.	2bp	4bm	4bp	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
B	r_{CC}	.47	.49	.40	.43	.71	.67	.61	.57
	McNemar	n.s.	2bp	4bm	n.s.	n.s.	10bp	11bm	n.s.

Zusatzaufgaben

		2mZ	2pZ		10mZ	10pZ
A	r_{CC}	n.s.	n.s.		n.s.	.54
	McNemar	2amZ	n.s.		n.s.	10pbZ
B	r_{CC}	.53	.46		.63	.57
	McNemar	2amZ	n.s.		n.s.	10bpZ

Erläuterung: In der Zeile "McNemar" werden die Aufgaben angegeben, die signifikant schwieriger sind.
Die Abkürzung 2m steht für das parallele Aufgabenpaar 2am/2bm; 2p für 2ap/2bp usw.
+ Unterschiede bezüglich 2p sind weitgehend auf Unterschiede in den Rechenoperationen zurückzuführen. 2ap verlangt Multiplikation in N, 2bp Division in Q.

Ergebnisse:

1) Die Ergebnisse in beiden Gruppen widersprechen zum Teil der Hypothese 4. So bereitet beiden Gruppen die Berechnung von Wertetabellen erheblich weniger Schwierigkeiten, wenn hierbei multipliziert (2ap) statt dividiert (2bp) werden muß. Ebenso ist es ein Unterschied, ob ein einfacher oder schwieriger Maßstab beachtet werden muß (4am/4bm und 4ap/4bp). Dies bedeutet, daß die Anwendung der Transformationen durch untergeordnete Aufgabenmerkmale gestört wird.
Trotz intensiver Behandlung sind die Schüler beider Gruppen in der Anwendung einzelner Verfahren so unsicher, daß relativ geringe Änderungen der Aufgabensituation ihr Verhalten stark beeinflussen. Daraus kann geschlossen werden, daß die Unterrichtszeit zu kurz für die behandelten Inhalte war und elementare Rechenprobleme das Lernen von komplexeren mathematischen Sachverhalten sehr erschwert.

2) Die r_{CC}-Werte für Parallelaufgaben liegen in der B-Gruppe in 9 von 12 Aufgabenpaaren höher als in der A-Gruppe. Da umgekehrt in der A-Gruppe für isomorphe Aufgaben die Tendenz zu höheren r_{CC}-Werten vorherrschte, kann daraus auf eine größere Kontextabhängigkeit in Gruppe B im Sinne der Hypothese 3 geschlossen werden.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß Hypothese 4 in einem Teil der Aufgaben widerlegt wurde, was auf eine mangelnde Beherrschung einzelner Operationen bei Transformationen zurückgeführt wird.

E Prüfung der Hypothese 5

Bezüglich der Ergebnisse in den Problemaufgaben und dem Lernspiel wurde eine signifikante Überlegenheit der Gruppe A über Gruppe B erwartet.

Ergebnisse bezüglich der Problemaufgaben:
Es ergaben sich signifikante Unterschiede zugunsten der Gruppe A im Sinne der Hypothese für folgende drei Aufgabenteile: 14p1 (Erkennen irrelevanter Parameter), 14pZ (Angabe des Arguments zu vorgegebenem Funktionswert), 15m (Beschreibung des Vorgehens zur Bestimmung algebraischer Darstellungen aus Meßwerttabellen).
Dagegen ließen sich keine signifikanten Unterschiede für die vier Aufgabenteile 5apZ, 13p/13pZ und 15p nachweisen. Eine detailliertere Diskussion der Ergebnisse erfolgt in Abschnitt 7.4.3 .

Auch hier wurde die Abhängigkeit der FPr-Werte von den Variablen "M-Note" und "LLT-Test" geprüft. Die Ergebnisse für die Aufgaben 14 und 15 sind in folgenden Tabellen dargestellt:

	14p1			14p2			14pZ		
	alle S.	S. mit M > 2	S. mit LLT ≤ 12	alle S.	S. mit M > 2	S. mit LLT ≤ 12	alle S.	S. mit M > 2	S. mit LLT ≤ 12
Gruppe A	18	17	14	43	41	39	18	13	17
Gruppe B	50	62	51	55	70	58	40	51	44
sign. Unterschied	x	x	x				x	x	x

Angegeben sind die FPr-Werte (in %)

	15p			15m		
	alle S.	S. mit M > 2	S. mit LLT ≤ 12	alle S.	S. mit M > 2	S. mit LLT ≤ 12
Gruppe A	60	65	57	45	42	42
Gruppe B	78	88	86	73	81	75
sign. Unterschied				x		

Angegeben sind die FPr-Werte (%)

Erläuterungen: Die Abkürzung "S. mit M > 2" meint "Schülergruppe, deren M-Note schlechter als 2 ist (unteres und mittleres Leistungsniveau bezüglich M-Note). Entsprechend "S. mit LLT ≤ 12": "Schülergruppe, deren LLT-Wert schlechter als 13 ist".

Ein Vergleich der Ergebnisse für die einzelnen Untergruppen zeigt, daß in Gruppe B die Ergebnisse relativ stark im Bezug auf Gruppe A von der Mathematiknote beeinflußt werden. Das bedeutet, daß Behandlung A weitgehend unabhängig von der vorherigen Mathematiknote die Anwendung mathematischer Kenntnisse auf obige Problemaufgaben bewirkt hat.

Ergebnisse bezüglich des Lernspiels:
Das Lernspiel (s. Abschitt 5.2.3 und Anhang 3.3), das von den Gruppen II und III in einer Physikstunde 14 Tage nach Abschluß der Behandlung ohne Notendruck geschrieben wurde, verlangte die Anwendung der Transformation $WT \rightarrow AD$ und der Operation $WY \cup GR \rightarrow WX$ in einer Spielsituation. Ausgehend von der Darstellung eines technischen Problems (Bau eines Ballons mit der Tragkraft G) mußte der Zusammenhang zwischen dem Gasvolumen und dem Auftrieb bestimmt werden. Dies war anhand der in dem Lernspiel gegebenen Informationen möglich, wenn man die richtige Strategie anwandte. Weiterhin sollte zu vorgegebener Tragkraft des Ballons das Gasvolumen angegeben werden.
Die Ergebnisse bezüglich dieser Aufgabenteile sind in folgender Tabelle dargestellt:

	Funktionstyp	Funktionsgleichung	Gasvolumen
Gruppe A	18	56	35
Gruppe B	59	78	21
sign. Unterschied	x		

FPr-Werte (%)

Die Ergebnisse zeigen,daß den beiden Gruppen die Angabe des analytischen Zusammenhangs zwischen Gasvolumen und Tragkraft sehr schwer fiel. Allerdings ergeben sich deutliche Unterschiede zwischen den Gruppen im Sinne der Hypothese 5, die bezüglich der Angabe des richtigen Funktionstyps signifikant sind. Das schlechtere Abschneiden der Gruppe A bei der relativ einfachen Ableseaufgabe ist auf einen höheren Anteil an Ablesefehlern zurückzuführen.
Wegen detaillierterer Auswertung des Lernspiels s. Abschnitt 7.4.4

.3.3 Zusammenfassende Darstellung der Ergebnisse zu Hypothese 1-5

Hypothese 1 konnte weitgehend bestätigt werden, d.h. bezüglich Aufgaben mit mathematischem Kontext bestehen keine signifikanten Unterschiede zwischen Behandlung A und B. Nur für eine Aufgabe (11am) deutet sich eine Überlegenheit der Gruppe B für die Anwendung des Steigungsalgorithmus an. Dies ist m.E. darauf zurückzuführen, daß Behandlung B ein mechanisches Anwenden dieses Algorithmus auf einfache Aufgaben in x-y-Notation stark begünstigt.

Hypothese 2 ist zurückzuweisen, da keine signifikante Überlegenheit der Gruppe A in isomorphen P-Aufgaben nachgewiesen werden konnte. Zwar liegen die Fehlerprozente vieler P-Aufgaben in Gruppe A niedriger als in Gruppe B. Die Unterschiede sind aber nicht signifikant. Z.T. wird dies darauf zurückgeführt, daß die Aufgabenmerkmale in den P-Aufgaben sehr stark auf die Anwendung der mathematischen Verfahren hinweist, wodurch die Ähnlichkeit zu den M-Aufgaben betont wurde.

Hypothese 3 konnte nur für einzelne Aufgaben bestätigt werden. Zwar war die Zahl signifikant schwerer P-Aufgaben in der Gruppe B mehr als doppelt so groß als in Gruppe A, die Zahl signifikanter Schwierigkeitsunterschiede in isomorphen Aufgabenpaaren differierte aber nur schwach, bedingt durch erhöhte Schwierigkeiten für M-Aufgaben in der Gruppe A. Hier deuten sich strukturelle Behandlungsunterschiede an, die auf die Vertrautheit mit bestimmten Notationen zurückzuführen sind.
In Verbindung mit der Kontingenzanalyse der Parallelaufgaben wird diese Kontextabhängigkeit für Gruppe B bestätigt.

Hypothese 4 wurde für einen Teil der Aufgaben widerlegt, so daß eine Abhängigkeit der Transformationen von untergeordneten Aufgabenmerkmalen angenommen werden muß. So konnte ein deutliches Anwachsen des Schwierigkeitsgrades von Aufgaben festgestellt werden, wenn diese sich auf Operationen mit rationalen Zahlen bezogen.

Hypothese 5 konnte weitgehend bestätigt werden. Sowohl für die Problemaufgaben als auch für wichtige Ergebnisse zum Lernspiel konnte eine deutliche Überlegenheit der Gruppe A über die Gruppe B festgestellt werden, die in vielen Fällen signifikant war.

Die Prüfung der Hypothesen läßt strukturelle Behandlungsunterschiede im Sinne der Grundannahmen der Untersuchung erkennen. Die relativ grobe Punktauswertung ist für eine detailliertere Beschreibung des Zusammenhangs zwischen Lernprozeß und Lernergebnis ungeeignet. Deshalb wurde eine Feinanalyse der Operationsfehler in den Aufgaben für beide Gruppen durchgeführt.

7.4 Analyse der Operationsfehler in den Kriteriumsaufgaben

Eine detaillierte Analyse der Behandlungsunterschiede wurde über die Operationsfehler in den Aufgaben versucht. Hierzu wurden für die in der Operationsanalyse (s. Anhang 4.1) bestimmten, aufgabenspezifisch überprüfbaren Teilergebnisse festgestellt, welche Operationen nur mangelhaft angewendet werden konnten (FPr > 30%).

Schwierigkeiten bei der Auswertung ergaben sich für die Personen, die eine Aufgabe nicht oder nur sehr unvollständig bearbeitet haben. Würde man aus der Nichtbearbeitung auf die Unkenntnis aller Operationen schließen, so erhielte man eine Überschätzung des Schwierigkeitsgrades aller der Operationen, die der zum Abbruch oder Nichtbearbeitung führenden Operationen nachfolgen.

Beispiel: In Aufgabe 10am soll eine analytische Darstellung in einen Graphen transformiert werden. Als erste wichtige Transformation müssen hierzu geordnete Paare bestimmt werden. Bei fehlender Kenntnis dieser Operation muß der Schüler diese Aufgabe abbrechen. Daraus kann aber nicht geschlossen werden, daß der Schüler geordnete Paare nicht als Punkte darstellen kann. Umgekehrt würde eine Nichtberücksichtigung der nicht oder unzureichend bearbeiteten Aufgaben eine Unterschätzung des Schwierigkeitsgrades für die Operationen, die zum Abbruch geführt haben, darstellen.

Unter dem speziellen Gesichtspunkt, daß sich die Überlegenheit der Gruppe A nicht als Artefakt einer ungleichen Bearbeitungsquote ergibt, wurde folgendes Verfahren angewendet:

1) Bei Nichtbearbeitung einer Aufgabe wurden jeweils die Operationen für das erste Teilergebnis als nicht gekonnt gewertet. Dabei wurden Zusatzaufgaben als unabhängig[26] von den Hauptaufgaben gesehen.

2) Nachfolgende Operationen, für die keine Teilergebnisse erkennbar sind, wurden für die Analyse der Operationsfehler nicht berücksichtigt.

3) Liegt der FPr-Wert einer Operation in der Gruppe A unter dem Wert der Gruppe B und wurde die entsprechende Aufgabe in der Gruppe A von weniger Schülern bearbeitet als in der Gruppe B, so wurde für Gruppe A ein korrigierter FPr-Wert (FPrk) berechnet:

$$FPrk(\%) = \frac{N_F + |N_B - N_A|}{N_B} \cdot 100$$

Erläuterung: N_F = Zahl der Schüler in der A-Gruppe, die betrachtete Operation falsch gemacht haben

N_A = Zahl der Schüler in der A-Gruppe, deren Ergebnis bewertet werden konnte

N_B = Zahl der Schüler in der B-Gruppe, deren Ergebnis bewertet wer-

Beispiel: Operation OP 9 in Aufgabe 4bm

	N	N_F	FPr%
A	22	2	9
B	25	7	28

Bei diesem Beispiel liegt FPr-Wert in Gruppe A niedriger als in Gruppe B, wobei gleichzeitig in Gruppe A nur N_A = 22 Schüler gegenüber N_B = 25 Schüler in Gruppe B die Aufgabe bis zur Zeichnung der Punkte (OP 9) bearbeitet hatten. Für die 3 Schüler in Gruppe A, die diese Aufgabe in Bezug auf Gruppe B weniger bearbeitet hatten, wurde angenommen, daß sie die entsprechende Operation (OP 9) ebenfalls nicht konnten. Der korrigierte FPr-Wert(FPRk) ist dann für Gruppe A:

$$FPrk(\%) = \frac{N_F + 3}{N_B} = \frac{2+3}{25} = 20\%$$

In diesem Fall wird die Überlegenheit der Gruppe A über Gruppe B zwar geringer, bleibt aber noch vorhanden. In den folgenden Tabellen sind jeweils diese FPrk-Werte angegeben.

.4.1 Analyse der Operationsfehler in Test I

Die Detailauswertung mußte aus Zeitgründen auf eine Teilpopulation beschränkt werden. Hierzu wurden 25 Schülerpaare der parallelisierten Stichprobe nach dem Zufallsprinzip aus Gruppe II - IV ausgewählt, was etwa 50% der Parallelstichprobe in diesen Klassen entspricht. Gruppe I blieb unberücksichtigt, da bestimmte Aufgaben (Aufgabe 13-15) bei dieser noch nicht vorkamen.

Im folgenden werden für jede Transformation getrennt diejenigen Operationen aufgeführt, bezüglich derer erhöhte Schwierigkeiten (FPrk > 30%) festgestellt wurden. Wegen der Bedeutung der Operationen siehe Anhang 4.2. Weiterhin wurden die Unterschiede zwischen den Gruppen für die Teilpopulation auf Signifikanz (χ^2-Test) geprüft. Allerdings ist der Hauptzweck dieser Analyse,auf qualitative Behandlungseffekte hinzuweisen, während quantitative Unterschiede wegen der reduzierten Personenzahl und der spezifischen Auswertung (FPrk-Werte) nicht mit den FPr-Werten in 7.3 vergleichbar sind.

A Ergebnisse zur Transformation AD → WT

Aufgaben: 2am, 2ap, 2bm, 2bp

Operationen des Lösungsprozesses:

OP 1 OP 2 → OP 3 OP 4 → OP 5

- OP 1 OP 2: Angabe der Platzhalter und Dimension in Wertetabellen
- OP 3 OP 4: Berechnung geordneter Paare aus dem Bereich
- OP 5: Beachtung von Rechenerleichterungen bei der Auswahl der Argumente

Schwierigkeiten:

Operation	OP 1			OP 2		OP 3			OP 4	OP 5
A	46	0	0	13	6	56	28	56	20	34
B	20	53	66	71	81	78	43	61	32	54
P	n.s.	s.	s.	s.	s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	2am	2ap	2bp	2ap	2bp	2am	2bm	2bp	2am	2am

FPrk-Werte (%) für AD→WT

Erläuterung zum Lesen der Tabelle:
z.B. gilt für OP 5, daß 34% der Schüler in Gruppe A und 54% der Schüler in Gruppe B, die die Aufgabe 2am bearbeitet haben, bei der Auswahl der Argumente nicht auf Rechenerleichterungen geachtet haben. Die Unterschiede sind nicht signifikant (n.s.) für $p = 0.05$. Diese Operationsfehler betreffen Aufgabe 2am.

Ergebnisse:

1) Nur ein geringer Prozentsatz der Schüler der Gruppe B war in der Lage, statt der gewohnten x-y-Notation physikalische Platzhalter mit Dimension (OP 1, OP 2) anzugeben. Mehrere Schüler dieser Gruppe haben die angegebene Rechenvorschrift in x-y-Notation umgeschrieben, ehe sie die Aufgaben lösten. Erhebliche Probleme mit der Notation traten in der Gruppe A bei Aufgabe 2am auf. Hier war die analytische Darstellung mit Hilfe des vereinfachten Pfeildiagramms in der Form $x \rightarrow f(x)$ ohne Angabe des Platzhalters für den Wertebereich formuliert worden. Dieser mußte willkürlich gewählt werden. Während Gruppe B ausschließlich im Sinne der gelernten Konvention y als Platzhalter wählte, gab die Gruppe A "Ergebnis", $\frac{x}{3} - 8$ und Q als Platzhalter an.

2) Die Berücksichtigung des Bereichs (OP 3) bereitete beiden Gruppen allgemein Schwierigkeiten, obwohl hierauf im Unterricht immer hingewiesen wurde. Häufigster Fehler war, daß nicht beide Bereichsgrenzen in die Wertetabelle aufgenommen wurden. Wesentlich seltener überschritten die Schüler bei der Auswahl der Argumente die Bereichsgrenzen. Dabei wurde OP 3 um so weniger berücksichtigt, je schwieriger die anzuwendenden Rechenoperationen waren.
Deutliche Unterschiede zwischen den Gruppen zugunsten der Gruppe A weisen darauf hin, daß diese Gruppe die Fragestellungen (Bereichsangaben) genauer beachtete.

3) Für die Interpretation von Rechenvorschriften (OP 4) läßt sich nur bei Gruppe B in der Aufgabe 2am Mängel erkennen, die mit dem hohen theoretisch berechneten Schwierigkeitsgrad der Rechenoperation (S = 35 ; s. Anhang 4.4) begründet werden können. Interessant zu erwähnen ist, daß die beteiligten Lehrer Aufgabe 2am wesentlich leichter (FPr ~ 15%) eingestuft haben als Aufgabe 2ap (FPr ~40%); d.h. die Rechenprobleme der Schüler wurden nur unzureichend gesehen.

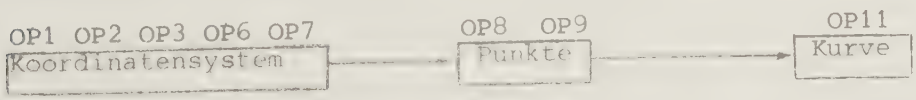
4) Ähnliche Überlegenheit der Gruppe A konnte auch bezüglich der Beachtung von Rechenerleichterungen festgestellt werden. Während Gruppe B stärker mechanisch die Auswahl der Argumente traf und dabei erhebliche Rechenschwierigkeiten bewältigen mußte, erfolgte in Gruppe A häufiger eine am Problem orientierte Argumentwahl.

Zusammenfassend läßt sich eine Überlegenheit der Gruppe A bei diesem Aufgabentyp in einem flexibleren Verhalten bezüglich der Beachtung spezifischer Aufgabenmerkmale feststellen. In dieser Gruppe zeigten sich Mängel in der Kenntnis mathematischer Konventionen (OP 1; 2am), die auf die Behandlung zurückzuführen sind.
In zwei 12. Klassen wurden ähnliche Fehler festgestellt. Besonders die Berücksichtigung des Bereichs wurde offensichtlich nie geübt, so daß z.B. bei Aufgabe 2bp in diesen Klassen auch negative Werte für den maximal erreichbaren Reifendruck berechnet wurden. Hieraus wird ebenfalls deutlich, daß von diesen Schülern der physikalische Kontext nicht ausreichend beachtet wurde.

B Ergebnisse zur Transformation WT → GR

Aufgaben: 4am, 4ap, 4bm, 4bp

Operationen des Lösungsprozesses:



Schwierigkeiten:

Operation	OP1	OP2	OP9
A	4	8	14
B	58	62	47
P	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Aufgabe	4bp		

Erläuterungen zum Lesen der Tabelle:
Z.B. gilt für Gruppe A bezüglich OP2 (Identifizierung der Dimension) FPrk = 8%, für Gruppe B FPrk = 62%; d.h. 62% in der Gruppe B haben keine Dimension der Variablen angegeben. Diese Unterschiede zwischen den Gruppen sind signifikant (s.) für p = 0.05. Die Fehler in der angegebenen Operation beziehen sich auf Aufgabe 4bp.

Ergebnisse:

1) Über die Hälfte der Schüler in Gruppe B geben keine physikalischen Platzhalter und deren Dimensionen (OP1, OP2) an, sondern verwenden weiterhin die gewohnte x-y-Notation. Die einseitige Verwendung der x-y-Notation in der Gruppe B bewirkte demnach schon nach drei Wochen, daß diese Gruppe zum Großteil nicht mehr auf den veränderten Kontext eingehen konnte. So wurde ein häufiges Umtaufen der physikalischen Platzhalter in x/y beobachtet; d.h. die Gruppe B versucht, durch bewußten Notationswechsel den physikalischen Kontext in den gewohnten mathematischen Kontext umzuändern. Dies Verhalten, was als sinnvoller Zwischenschritt anzusehen ist, birgt die Gefahr in sich, daß das physikalische Problem nicht mehr gesehen wird. Dies konnte häufig bei Lehrerstudenten beobachtet werden.
   In Gruppe A traten diese Schwierigkeiten nicht auf.

2) Die Berücksichtigung nicht-trivialer Maßstäbe (OP9) bereitete beiden Gruppen Schwierigkeiten. Von den Schülern wurde hierzu angemerkt, auf solche "Feinheiten" hätten sie nicht geachtet. Diese Tendenz, "untergeordnete" Operationen keine große Aufmerksamkeit zu schenken, wurde bei vielen Aufgaben beobachtet.

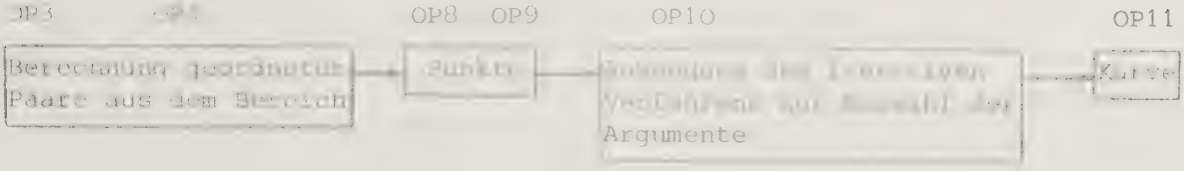
3) Bezüglich der übrigen Operationen wurden keine erhöhten Schwierigkeiten festgestellt. Auch nicht für die Bestimmung nichttrivialer Maßstäbe (OP7), was in den zwei untersuchten 12. Klassen (naturwissenschaftlicher Zweig) noch große Schwierigkeiten bereitete (FPr = 66%). Man muß diese Fehler auf mangelnde Übung im Mathematik- und Physikunterricht zurückführen, da sich sonst diese Fehler nicht bis zur 12. Klasse hätten halten können. Aus Unterrichtsbeobachtungen in verschiedenen Klassen und aus Gesprächen mit Physiklehrern, aber auch aus der Schulbuchanalyse (s. Abschn. 3.2) läßt sich der Schluß ziehen, daß im Physikunterricht auf graphische Darstellungen zugunsten anderer Darstellungen (Formeln, verbale Aussagen, Wertetabellen) weitgehend verzichtet wird.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß für die Versuchspersonen die Transformation WT → GR keine prinzipiellen Schwierigkeiten beinhaltet.

C Ergebnisse zur Transformation AD → GR

Aufgaben: 10am, 10ap, 10bm, 10bp

Operationen des Lösungsprozesses:



Schwierigkeiten:

Operation	OP 3				OP4	OP10				OP11		
A	29	34	28	33	28	[illegible]	8	0	47	33	33	33
B	45	56	65	20	48	82	40	40	35	13	13	13
P	n.s.	n.s.	5.	n.s.	n.s.	n.s.	[illegible]	5.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	10am	10ap	10bm	10bp	10bp	10am	10ap	10bm	10bp	10ap	10bm	10bp

FPrk-Werte (%) für AD → GR

Ergebnisse:

1) Die Berücksichtigung des Bereichs (OP 3) fällt wiederum beiden Gruppen schwer. Bei Aufgabe 10bm sind die Unterschiede signifikant zugunsten der Gruppe A.

2) Die Interpretation von Rechenvorschriften (OP 4) läßt lediglich für Gruppe B bei Aufgabe 10bp Schwierigkeiten erkennen, was auf den ausgedehnten physikalischen Kontext (105 Wörter in der Aufgabenstellung) zurückgeführt wird. Viele Schüler der Gruppe B haben diese Aufgabe erst gar nicht begonnen.
Ein Vergleich der Schwierigkeit von OP 4 bei dem Aufgabentyp AD → WT und AD → GR zeigte nur einen geringen Anstieg des Schwierigkeitsgrades durch die Zusatztransformation WT → GR für AD → GR, da die Transformation WT → GR kein größeres Problem darstellte. Dies ist der folgenden Kreuztabelle zu entnehmen, bei der das Lösungsverhalten bezüglich OP 4 für die beiden Transformationen AD → WT und AD → GR verglichen wurde. Hierzu wurde festgestellt, wieviel Schüler OP 4 bei 2am/10am, 2ap/10ap, 2bm/10bm, 2bp/10bp anwenden konnten. Der Vergleich bezieht sich also auf Aufgaben mit gleichem Kontext und ähnlicher Funktionsgleichung.

Aufgabe 10

Aufg 2	+	-
+	21%	15%
-	6%	3%

Gruppe A

Aufgabe 10

Aufg 2	+	-
+	66%	12%
-	10%	12%

Gruppe B

Daraus geht hervor, daß in beiden Gruppen etwa 80% aller Schüler ein stabiles Lösungsverhalten bezüglich OP 4 zeigen.

3) Die Kenntnis des iterativen Verfahrens (OP10) wurde nur mangelhaft beherrscht. Zwei typische Fehler waren zu erkennen:
   a) Bei linearen Funktionen wurden mehr als 5 Punkte eingezeichnet
   b) bei inversen Funktionen führte äquidistante Auswahl der Argumente zu Ungenauigkeiten im Kurvenverlauf der Funktion im Bereich starker Krümmung.

   Hier handelt es sich ähnlich OP3 und OP9 um eine Operation, die von den Schülern als "Feinheit" angesehen wird.

4) Die Tendenz, Punkte durch Kurven zu verbinden (OP11), war in der Gruppe B größer als in Gruppe A. Zu diesem Zeitpunkt war das Kurvenkonzept noch nicht ausführlich begründet. Für Schüler beider Gruppen bestand der Graph einer Funktion aus Punkten und nicht aus einer geschlossenen Linie. Deshalb ergaben sich in den Zusatzaufgaben zu diesem Aufgabentyp (Interpolation von Graphen) erhebliche Probleme (siehe Punkt D).

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß keine prinzipiellen Schwierigkeiten mit der Transformation AD $\longrightarrow$ GR in beiden Gruppen auftraten. Dagegen werden untergeordnete Operationen (OP 3, OP10, OP11) nur mangelhaft beherrscht. Daraus muß auf eine zu geringe Betonung und Übung während des Unterrichts geschlossen werden. Unterschiede zwischen den Gruppen ergeben sich bei Aufgabe 10bp, die wegen ihres längeren physikalischen Kontexts in Gruppe B häufiger verweigert wurde.

D Ergebnisse zur Transformation GR → VD

Aufgaben: 4bmZ, 4bpZ

Operationen des Lösungsprozesses:

OP 1, OP20

Schwierigkeiten:

Operation	OP 1	OP20	
A	5	25	56
B	35	36	54
P	s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	4bpZ	4bmZ	4bpZ

FPrk-Werte (%) für GR → VD

Ergebnisse:

1) Die verbale Beschreibung von Graphen (OP20), die nicht geübt wurde, bereitete beiden Gruppen die größten Schwierigkeiten. Der Anstieg der Fehler bei 4bpZ ist weitgehend auf Fehlinterpretationen des physikalischen Sachverhaltes zurückzuführen, obwohl nur eine Beschreibung der Funktion gefordert war. Viele Schüler kennen nicht den Unterschied zwischen Deskription und Interpretation. Interessant anzumerken ist, daß die Beschreibung des Graphen in beiden Gruppen teilweise im Widerspruch zur Alltagserfahrung steht.
   Beispiel: Drei Schüler bemerken etwa ähnlich: Am Anfang wird die Kugel immer schneller, während sie in der Nähe des Bodens wieder langsamer wird.
   In Gesprächen konnte festgestellt werden, daß diese Schüler Geschwindigkeit und Beschleunigung durcheinandergebracht hatten. Gespräche mit anderen Schülern, die diese Aufgabe richtig gelöst hatten, zeigten ebenfalls erhebliche Unsicherheiten, einen Zusammenhang zwischen mathematischer Beschreibung und Phänomen herzustellen.

2) Der Bezug auf den physikalischen Kontext fiel Gruppe B signifikant schwerer als Gruppe A. Fehler sind zum Großteil auf die Verwendung der x-y-Notation zurückzuführen

E Ergebnisse in den Zusatzaufgaben zur Transformation WT → VD

Aufgaben: 2amZ, 2apZ, 2bmZ, 2bpZ

Operationen des Lösungsprozesses:
OP 1, OP21

Schwierigkeiten:

Operation	OP21	
A	16	8
B	32	44
P	n.s.	s.
Aufgaben	2amZ	2bpZ

FPrk-Werte (%) für WT→GR

Ergebnisse:

1) Schwierigkeiten mit der verbalen Darstellung von Wertetabellen (OP21), was im Unterricht nicht geübt worden war, treten weitgehend nur in der Gruppe B auf. Bei Aufgabe 2bpZ ist dies zum Teil durch häufigeres Auslassen dieser Zusatzaufgaben in Gruppe B bestimmt.

2) Bezüglich der Angabe der richtigen Platzhalter (OP 1) traten in beiden Gruppen keine Probleme auf. Dies Ergebnis steht im Widerspruch zu den Notationsproblemen in den zugehörigen Hauptaufgaben 2am/2bp, was durch die Aufgabenform (Ergänzungsaufgaben) bedingt ist. Der vorgegebene erste Teil der Aussagen in 2apZ und 2bpZ enthielt jeweils deutliche Hinweise auf die veränderten Platzhalter, so daß es schwer fiel, den Satz in x-y-Notation zu beenden. Anzumerken ist, daß in der Gruppe B die Verwendung der physikalischen Platzhalter in den Zusatzaufgaben sich nur selten in einer nachträglichen Korrektur der falschen Platzhalter in der Hauptaufgabe niederschlug.

Zusammenfassend läßt sich bei diesen Transferaufgaben eine deutliche Überlegenheit der Gruppe A, besonders bei 2bpZ, feststellen.

F Ergebnisse in den Zusatzaufgaben zu den Operationen WY ∪ GR → WX und VY ∪ GR → WX

Aufgaben: 10amZ, 10apZ, 10bmZ, 10bpZ (WY ∪ GR → WX)
4amZ, 4apZ, 7bm, 7bp (VY ∪ GR → WX)

Operationen des Lösungsprozesses:
OP 9, OP22, OP23

Schwierigkeiten:

Operation	OP22				OP 9
A	32	36	32	40	33
B	40	28	32	52	25
P	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgaben	10amZ	10apZ	10amZ	10bpZ	7bp

FPrk-Werte (%) für (WY,VY) ∪ GR → wx

Ergebnisse:

1) Schüler beider Gruppen haben große Schwierigkeiten mit dem Ablesen des Argumentwertes WX zu vorgegebenem Funktionswert WY aus einem Graphen (OP22), was im Unterricht nicht geübt wurde. Es muß angenommen werden, daß ihnen der Zusammenhang zwischen der analytischen Darstellung und dem Graphen noch relativ unklar ist. Hierauf deutet das Lösungsverhalten vieler Schüler hin, die WX mit Hilfe der Funktionsgleichung berechneten, obwohl sie anhand des Graphen auf diese Rechnung hätten verzichten können.
Diese Interpretation wird weiterhin unterstützt durch die Ergebnisse zur Operation VY ∪ GR → WX (OP23), die keinerlei Schwierigkeiten bereitete. Schüler begründeten dies damit, daß bei den Aufgaben zu OP23 die Koordinaten ausgezeichneter Punkte gesucht waren, die ohne Interpolation dem Graphen entnommen werden konnten.

2) Die Berücksichtigung nichttrivialer Maßstäbe (OP 9) wurde nur fehlerhaft beherrscht.

Unterschiede zwischen den Gruppen lassen sich nicht erkennen.

.2 Zusammenfassung der Operationsanalyse zu Test I

Die Analyse der Fehler bezüglich der Operationen in den Testaufgaben zu Test I lieferte folgende wichtige Ergebnisse:

1) Es bestehen keine qualitativen Unterschiede zwischen den Gruppen bezüglich der Operationen "Interpretation von Rechenvorschriften (OP 4)", "Maßstab bestimmen (OP 7)" und "geordnete Paare als Punkte darstellen (OP 9)", die für die geübten Transformationen AD → WT, WT → GR und AD → GR wichtig sind. Die FPrk-Werte dieser Operationen (kleiner als 30%) deuten auf geringe SChwierigkeiten hin.

2) Für 11 von 35 untersuchten Operationen mit einem FPrk-Wert größer 30% treten signifikante Unterschiede zugunsten der Gruppe A auf, wobei sich 8 Fälle auf P-Aufgaben bezogen. In 7 Fällen sind diese Unterschiede auf Notationsfehler der Gruppe B zurückzuführen, die auch in P-Aufgaben häufig die x-y-Schreibweise beibehalten hatte.In vielen Fällen wurde sogar die Notation der Aufgabestellung im Sinne der gewohnten x-y-Notation verändert. Diese Schwierigkeiten führten aber nicht zu einer erheblichen Störung des Lösungsprozesses für Aufgaben mit physikalischen Kontext.
Umgekehrt ergab sich für Gruppe A bei M-Aufgaben, in denen nur der Platzhalter für den Definitionsbereich angegeben war (s. 2am), Notationsschwierigkeiten, die sich in der Unsicherheit über die Wahl des nichtgegebenen Platzhalters zeigte.

Die übrigen signifikanten Unterschiede betreffen die Beachtung des Bereichs (OP 3; 1x), Anwendung des iterativen Verfahrens bei der graphischen Darstellung von analytischen Funktionen (OP 1o; 2x) und die verbale Darstellung von Wertetabellen (OP 21; 1x). Da diese Unterschiede aber nur bei einzelnen Aufgaben festgestellt werden konnten, wird ihnen keine größere Bedeutung beigemessen.

3) Beide Gruppen hatten erhebliche Probleme mit der Anwendung von Operationen, die sich auf für die Schüler als untergeordnet angesehenen Aufgabenmerkmale bezogen. Sie betrafen die Berück-

sichtigung des Bereichs (OP 3), die ausreichende Berücksichtigung nichttrivialer Maßstäbe (OP 9). Weitere Mängel wurden für das Interpolationsverfahren für Graphen (OP 22) und die verbale Beschreibung graphisch dargestellter Zusammenhänge (OP 2o) festgestellt. Diese Ergebnisse bezüglich "untergeordneter" Inhalte sind z.T. auf deren unzureichende explizite Übung in der Lehreinheit zurückzuführen. Auf der anderen Seite dokumentieren sie aber eine noch sehr geringe Vertrautheit mit dem Funktionskonzept und mit Darstellungstransformationen.

Analyse der Operationsfehler in Test II

Für die Auswertung wurden die gleichen Paare herangezogen wie bei Test I. Allerdings konnte Gruppe IV nicht mehr berücksichtigt werden, da diese Test II wegen Zeitmangels nicht mehr bearbeitet hatte. Die verbleibenden 20 Schülerpaare aus Gruppe II und III werden aber als ausreichend angesehen, um qualitative Unterschiede zwischen den Gruppen festzustellen.

A Ergebnisse zur Transformation VD → GR

Aufgaben: 1bm, 1bp

Operationen des Lösungsprozesses:

OP18		OP 3 / OP 8
Identifizierung relativer Angaben über Kurvenverläufe	→	Kurvendarstellung unter Berücksichtigung der Bereichsangaben

Schwierigkeiten:

Operation	OP18	Maßstab	
A	30	25	26
B	15	36	31
P	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	1bm	1bm	1bp

FPrk-Werte (%)
für VD → GR

Erläuterung:
Mit der Kategorie "Maßstab" wird der Prozentsatz der Schüler erfaßt, die trotz fehlender zahlenmäßiger Angabe der Funktionswerte einen Maßstab gezeichnet haben.

Ergebnisse:

1) Die Gruppe A macht wesentlich mehr Fehler bei der Umsetzung relativer Angaben über den Kurvenverlauf (OP18) bei der Aufgabe 1bm mit mathematischem Kontext (Für die isomorphe Physikaufgabe 1bp sind die Verhältnisse umgekehrt: FPrk(A) = 5%; FPrk(B) = 15%). Im wesentlichen ist dieser Fehler auf ein Unverständnis der Angabe "Die Funktionswerte...sind für x-Werte größer 300 Null" in Gruppe A zurückzuführen.

2) In beiden Gruppen begegnen etwa 1/4 der Schüler der Unsicherheit mit den relativen Angaben der Funktionswerte durch Einzeichnen willkürlicher Maßstäbe, die ihnen als Fixpunkte dienten.

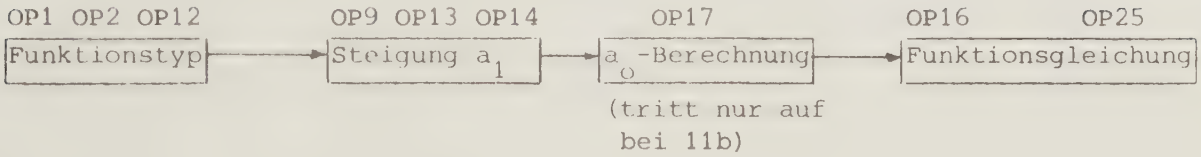
Insgesamt konnten gute Ergebnisse für diese Transformation festgestellt werden, was für die verbale Vermittlung von Zusammen-

hängen im Physikunterricht wichtig ist.

B Ergebnisse zur Transformation GR → AD

Aufgaben: 11am, 11ap, 11bm, 11bp

Operationen des Lösungsprozesses:



Schwierigkeiten:

Operationen	OP1		OP2		OP12		OP14		OP17	
A	30	35	50	50	50	15	45	35	50	27
B	50	65	75	90	30	35	10	25	44	35
P	n.s.	n.s.	n.s.	s.	n.s.	n.s.	s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	11ap	11bp	11ap	11bp	11bm	11bp	11bm	11bp	11bm	11bp

FPrk(%) für GR → AD

Ergebnisse:

1) Während in Test I von Gruppe A nur geringe Notationsfehler bei P-Aufgaben gemacht wurden, treten jetzt erhebliche Probleme mit OP 1 und OP 2 auf. Hier zeichnet sich ab, daß die Einführung der linearen Funktionstypen und der Steigungsformel in x-y-Schreibweise die Gruppe A ebenfalls stärker auf diese Notation festlegte. Die Übungen mit anderen Notationen haben diesen Einführungseffekt nicht beseitigen können. Immerhin sind aber die Fehler zu OP 1 und OP 2 noch wesentlich geringer als in Gruppe B.

2) Die Erkennung des Funktionstyps (OP12) zeigt bei 11bm Schwierigkeiten der Gruppe A, bei 11bp der Gruppe B. Diese Tendenz ist auf stärkere Auslassung von M-Aufgaben in der Gruppe A und von P-Aufgaben in der Gruppe B begründet. Hierin deuten sich Behandlungsunterschiede an, wie sie auch bei der Berechnung der Steigung (OP14) erkennbar sind. Während in der Gruppe A in P-Aufgaben weniger Schwierigkeiten mit der Steigungsberechnung als in den M-Aufgaben deutlich werden, nehmen sie in der Gruppe B bei P-Aufgaben zu. Die Lösungsergebnisse der Schüler in der Gruppe A zeigten aber insgesamt mehr Schwie-

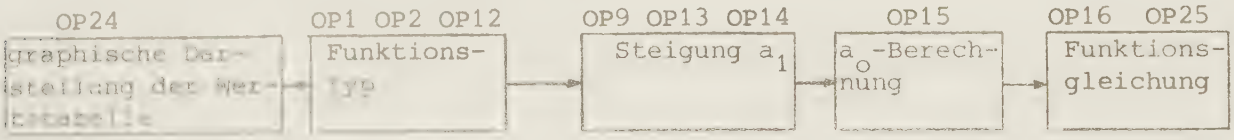
rigkeiten mit der Berechnung der Steigung nach Formel $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ als die der Gruppe B. Häufige Fehler waren: Vertauschung der Reihenfolge der Komponenten ($a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$) und die Vertauschung von Zähler und Nenner ($a_1 = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$). Es wird angenommen, daß die unzureichende Behandlung dieses komplexen Algorithmus mechanisches Lernen begünstigte, was in Behandlung B wegen der feststehenden Notation erleichtert wurde.

3) Die Berechnung von a_o (OP17) stieß in beiden Gruppen ebenfalls auf größere Probleme, die mit unzureichender Übung dieses komplexen Verfahrens begründet werden. Rechenschwierigkeiten und unzureichende Kenntnisse in der Lösung von Gleichungen mit einer Unbekannten ließen schon im Unterricht eine Überforderung der Schüler erkennen. Ohne solide Rechenfertigkeiten lassen sich diese Verfahren eben nur schlecht vermitteln.

C Ergebnisse zur Transformation WT → AD

Aufgaben: 12am, 12ap

Operationen des Lösungsprozesses:



Schwierigkeiten:

Operation	OP1	OP2	OP9	OP12		OP14		OP15	
A	40	45	0	25	35	35	45	40	40
B	60	70	33	35	45	35	40	45	55
P	n.s.	s.	s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	12ap	12ap	12ap	12am	12ap	12am	12ap	12am	12ap

FPrk-Werte (%) für WT → AD

Ergebnisse:

1) Ähnlich den Ergebnissen zu GR $\rightarrow$ AD ergeben sich Schwierigkeiten mit der Notation (OP 1, OP 2) und der Anwendung des Steigungsalgorithmus (OP14).

2) Die Bestimmung von a_0 aus dem Graphen wurde ebenfalls nur unzureichend gelernt. An sich stellt dieses Verfahren keine großen Anforderungen, da es hierbei lediglich um das Ablesen des Achsenabschnittes geht. Da dieser Algorithmus aber nur für spezielle Fälle (lineare Funktionen, deren y-Wert für x = 0 bekannt ist) gilt, wurde in der Behandlung der Rechenalgorithmus für a_0 stärker betont, der auch für andere Funktionen anwendbar ist.

Zusammenfassend läßt sich für die Transformationen (GR,WT) $\rightarrow$ AD feststellen, daß die Schüler diese nur mangelhaft gelernt haben. Als Hauptgrund wird hierfür die Komplexität dieser Transformationen angesehen. Sie verlangen sichere Rechenfertigkeiten für Quotienten von Differenzen rationaler Zahlen, für Lösungen von Gleichungen mit einer Unbekannten und stellen hohe Voraussetzungen an das Abstraktionsvermögen der Schüler. Alle Untersuchungen, die sich mit ähnlichen Inhalten beschäftigen, kommen zu dem gleichen Ergebnis (s. z.B. Ergebnisse von REDFIELD/ATWOOD, 1966). In Gesprächen mit den untersuchten Schülern konnte häufig festgestellt werden, daß diesen zwar die Zuordnung eines Funktionstyps zu Graphen einleuchtete, ihnen aber das Verfahren zur Berechnung der Parameter a_1 und a_0 fremd blieb. Dies zu vermitteln, hätte eine wesentlich längere Behandlung erfordert, als in den Hessischen Rahmenrichtlinien vorgesehen war. Deshalb muß damit gerechnet werden, daß bezüglich dieser Transformationen im Physikunterricht auch nach der Behandlung dieser Inhalte im Mathematikunterricht starke Probleme mit den mathematischen Methoden auftreten, die ein Verständnis für die Algebraisierung physikalischer Phänomene verhindern. In diese Richtung weisen ebenfalls die Ergebnisse von KARPLUS/KARPLUS (1973)).

D Ergebnisse zu den Zusatzaufgaben für Operation WY ∪ GR → WX

Aufgaben: 11amZ, 11apZ, 12amZ, 12apZ

Operationen des Lösungsprozesses:
OP 9, OP22

Schwierigkeiten:

Operation	OP22
A	15
B	30
P	n.s.
Aufgabe	12apZ

FPrk-Werte (%) für WY ∪ GR → WX

Ergebnisse:
Die Lösungen zeigen nur noch geringe Fehler gegenüber den Ergebnissen zu Test I, was auf Lerneffekte durch Test I hindeutet, da auch im Teil II der Behandlung diese Inhalte nicht explizit geübt wurden.

E Ergebnisse zu den Problemaufgaben

Aufgaben: 5ap[27], 13,14,15

a) Ergebnisse zu Aufgabe 5ap

Bei dieser Aufgabe ging es um die Beschreibung einer Filterkurve (5ap) und Bewertung ihrer Eigenschaften für Landschaftsaufnahmen (5apZ). Beide Fragestellungen bereiteten den Gruppen keine größeren Schwierigkeiten. Im wesentlichen wurde bei 5ap angegeben, daß es sich hier um einen Farbfilter handelt, der grünes Licht schlecht durchläßt. Unterschiede zwischen den Gruppen waren nicht erkennbar.

b) Ergebnisse zu Aufgabe 13

Diese Aufgabe verlangte eine Begründung des Kurvenverlaufs eines Graphen (Zahl der Wohnungen pro km^2 in Abhängigkeit von der Entfernung zum Stadtzentrum) durch Informationen aus einem zweiten Graphen (Grundstückspreise in Abhängigkeit von der Entfernung zum Stadtzentrum)(OP28).

Weiterhin ging es um die Angabe eines Bereiches mit bestimmten Eigenschaften, die aus der Fragestellung abgeleitet werden mußten (OP29):

Schwierigkeiten:

Operation	OP28	OP29
A	70	25
B	73	33
P	n.s.	n.s.
Aufgaben	13p	13pZ

FPrk-Werte (%) für Aufgabe 13

Ergebnisse:

1) Die Schüler beider Gruppen waren nicht in der Lage, bei der Begründung der Zusammenhänge im ersten Graphen die Information aus dem zweiten Graphen zu berücksichtigen. Deshalb wird angenommen, daß beiden Gruppen die Auswertung graphischer Darstellungen noch so schwer fiel, daß sie die angegebene Informationsquelle nicht berücksichtigten. Statt dessen versuchten sie, eigene Begründungen für den Kurvenverlauf im ersten Graphen sich auszudenken.

2) Die Identifizierung von Bereichen mit vorgegebenen Eigenschaften (hohe Bevölkerungsdichte) in Graphen bereitete beiden Gruppen keine Schwierigkeiten.

c) Ergebnisse zu Aufgabe 14

Aufgabe 14 verlangte die Angabe des Arguments zu vorgegebenem Funktionswert (OP22), die Identifizierung irrelevanter Parameter (OP30) und deren Begründung anhand des Graphen (OP19).

Schwierigkeiten:

Operation	OP22	OP30	OP19
A	15	10	16
B	42	45	35
p	s.	s.	ns.
Aufgaben	14pZ	14p1	14p2

FPrk-Werte (%) für Aufgabe 14

Ergebnisse:

1) Signifikante Unterschiede zugunsten Gruppe A bezüglich den Operationen OP22 und OP3o, was durch häufiges Auslassen dieser Aufgabe in Gruppe B bedingt wurde. Dieses Ergebnis verweist auf Behandlungsunterschiede für die Anwendung der gelernten mathematischen Kenntnisse auf Aufgaben, in denen der Kontext mitberücksichtigt werden muß und eine Lösung aufgrund der geübten Algorithmen nicht möglich war.
2) Bei der Begründung ihrer Entscheidung wurde neben dem Hinweis auf den konstanten Zusammenhang zwischen Schwingungsdauer und Masse von Schülern beider Gruppen öfter der zeitliche Ablauf der Schwingung beschrieben. Auch hierin wird deutlich, daß die Schüler nur schwer zwischen Begründung und Beschreibung differenzieren können.

d) Ergebnisse zu Aufgabe 15

Aufgabe 15 verlangte die Angabe eines Versuchsplans (OP31, OP32) zur Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Fallhöhe und Fallzeit (15p) und die Darstellung der mathematischen Methoden (OP24, OP25) bei der Auswertung der Meßergebnisse (15m).

Schwierigkeiten:

Operation	OP31	OP32	OP24	OP25
A	25	5O	25	18
B	33	53	46	33
P	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
Aufgabe	15p		15m	

FPrk-Werte (%) für Aufgabe 15

Ergebnisse:

1) Zwar konnten die meisten Schüler ungefähr angeben, wie die Messung durchgeführt werden mußte (OP31), aber nur ein geringer Teil ging auf die Bedeutung von Meßwerttabellen für die Bestimmung des analytischen Zusammenhangs ein. Unterschiede zwischen den Gruppen waren nicht festzustellen.
2) Deutliche Differenzen konnten dagegen für den mathematischen Teil der Aufgabe 15 beobachtet werden. Die Schüler der B-Gruppe gehen wesentlich häufiger davon aus, daß es sich bei

dem vorgegebenen Problem um eine lineare Funktion handle und reproduzieren den Algorithmus für die Bestimmung von a_1 und a_o. Die Gruppe A ist demgegenüber flexibler und weist häufiger darauf hin, "falls es sich um einen bekannten Funktionstyp handelt, suche ich die Funktionsgleichung".

F Ergebnisse zum Lernspiel

Die Feinanalyse der Ergebnisse zum Lernspiel (s. Abschnitt 5.2.3 und Anhang 3.3) wurden bezüglich folgender Fragestellungen ausgewertet:

a) Welche Unterschiede bestehen zwischen den Gruppen bezüglich der Operationen zur Bestimmung der analytischen Funktion (Zusammenhang zwischen Gasvolumen V und Auftrieb A) und des Arguments (Gasvolumen zu vorgegebenem Auftrieb)?

b) Welcher Unterschied läßt sich in der Lösungsstrategie des physikalischen Problems beider Gruppen erkennen?

c) Wie unterscheiden sich die schriftlichen Äußerungen zum Versuchsplan vor der Bearbeitung des verzweigten Programms?

a) Analyse der Operationsfehler:

Für die Bestimmung der Funktionsgleichung mußten folgende Operationen (s. Anhang 4.2) angewendet werden: OP 1, OP 2, OP12 und OP14. Für die Bestimmung des Arguments OP22.

Zur Überprüfung der Parallelität der beiden Gruppen bezüglich der mathematischen Voraussetzungen wurden Aufgabe 11ap und 11apZ verwendet, die in ihren Anforderungen den mathematischen Inhalten des Lernspiels vergleichbar waren.

Die Fehlerprozente bezüglich 11ap und 11apZ in der Teilpopulation, die am Lernspiel teilgenommen hat, sind:

	11ap	11apZ
Gruppe A	35	16
Gruppe B	24	18

Diese Unterschiede sind nicht signifikant, so daß die Parallelität der beiden Gruppen bezüglich der mathematischen Voraussetzungen angenommen werden kann.

Die Fehlerprozente FPr (%) bezüglich der Ergebnisse zu den

einzelnen Operationen im Lernspiel sind:

	OP1+	OP2+	OP12+	OP14	OP22
Gruppe A	54	54	18	56	45
Gruppe B	86	86	59	79	21

+ signifikante Unterschiede (χ^2-Test)

Ergebnisse:

1) Deutliche Unterschiede im Sinne der Hypothese 5 für die Bestimmung der Funktionsgleichung (OP1 -OP14), die in drei Fällen signifikant sind.

2) Unterschiede in der Bestimmung des Arguments (OP22) zugunsten Gruppe B. Diese wurden weitgehend durch Ablesefehler in Gruppe A bedingt.

Noch krasser fällt der Unterschied zwischen den Gruppen A und B aus, wenn man die FPr-Werte für die Angabe der richtigen Funktionsgleichung in physikalischer Notation betrachtet (OP1, OP2, OP12, OP14 und OP 22 richtig). Für Gruppe A lag der FPr-Wert bei 65%, für Gruppe B bei 95%. Der Wert für Gruppe B stimmt etwa mit den Ergebnissen von ZERBST/NÄGERL (1975) in Untersuchungen bei Studienanfängern überein.
Der schnelle Wissensverlust, der in Gruppe B wesentlich stärker ausfällt als in A, weist auf eine geringe Stabilität der Kenntnisse zu komplexeren mathematischen Algorithmen hin. Dies wird z. T. auf zu schnelles Vorgehen in der vorausgegangenen Behandlung zurückgeführt. Ein längeres Üben war wegen der bestehenden Lehrplänen in den einzelnen Schulen nicht möglich.

b) Analyse der Lösungsstrategien:

Die Untersuchung der Lösungswege bezieht sich ausschließlich auf Ebene 1 (siehe Abschn. 5.2.3), wo der Schüler die erste Entscheidung über sein Vorgehen treffen muß.

Klassifikation der Entscheidungen und Häufigkeiten

	Gruppe A	Gruppe B
1) Schüler weiß nicht, wie er vorgehen soll (2.8)	1	8
2) Schüler informiert sich über physikalische Grundlagen (2.3)	6	7
3) Schüler berücksichtigt Fragestellung nicht (2.4)	3	8
4) Schüler will Problem ohne Versuche lösten (2.1;2.6)	10	15
5) Schüler will anhand einer Messung Gleichung bestimmen (2.7)	17	14
6) Schüler kennt Meßmethode zur Lösung (2.2)	0	11
7) Schüler entscheidet sich für eine Meßreihe (2.5)	20	13

(In Klammern jeweils die Kennummer der Verzweigung)

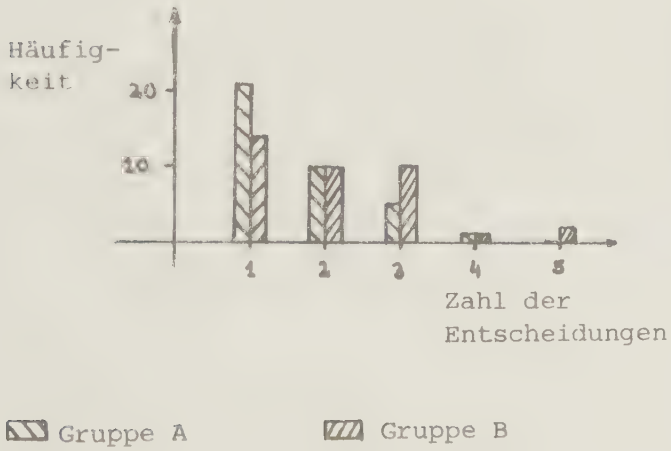
Ergebnis:

1) Das Bedürfnis nach physikalischen Informationen ist in beiden Gruppen gleich (s. Punkt 2). Deshalb kann angenommen werden, daß beide Gruppen etwa gleich gut mit dem angesprochenen physikalischen Phänomen vertraut waren.

2) Die Zahl der Schüler, die nicht wissen, wie sie vorgehen sollen oder ohne Versuche das Problem lösen wollen (1,3,4), ist in der Gruppe B doppelt so hoch wie in der Gruppe A (A = 14; B = 31).

3) Die Zahl der Schüler, die Messungen durchführen wollen (5,6,7), ist etwa gleich (A = 37, B = 38), wobei aber in der Gruppe A wesentlich mehr Schüler sich für Meßreihen entscheiden.

Die Verzweigung des Programms verweist Schüler, die unsicher sind oder einen falschen Weg einschlagen, zurück zur Ebene 1. Die Häufigkeitsverteilung über die Zahl der notwendigen Entscheidungen, um Ebene 1 zu verlassen, ist folgender Abbildung zu entnehmen:



Der Mittelwert für die Gruppen ist:

A = 1.6 ± 0.8
B = 2.1 ± 1.1

Die Gruppe B braucht im Mittel mehr Hilfen als die Gruppe A, um einen sinnvollen Weg einzuschlagen. Unterschiede zwischen den Gruppen bezüglich derjenigen, die bei der ersten Entscheidung Ebene 1 verlassen, sind nicht signifikant.

c) Analyse der schriftlichen Äußerungen zum Versuchsplan:

Die Schülerantworten wurden nach folgenden Kategorien klassifiziert:

Kategorien 1 : Versuch mit Modell
2 : mehrere Versuche mit Modell
3 : Wissenschaftler fragen
4 : Gleichung bestimmen wollen
5 : Volumen ausrechnen wollen
6 : großen Ballon bauen
7 : nicht klassifizierbar
8 : nicht beantwortet

Wesentliche Unterschiede zwischen den Gruppen ergaben sich bezüglich der Kategorie 1 + 2 (Versuche mit Modell machen) und Kategorie 6 (großen Ballon bauen).

Kategorie	1+2	6
Gruppe A	56%	18%
Gruppe B	29%	37%

Prozentuale Häufigkeit von Kategorie 1+2; 6

Während die schriftlichen Äußerungen bei der Gruppe A zu 56% auf Versuche mit Modellen eingingen, erwähnten in der Gruppe B dies nur 29%. Wesentlich mehr Schüler B gingen auf die Konstruktionsbeschreibung eines Ballons ein, den sie bauen wollten (37%). Diese Unterschiede sind signifikant auf dem 5%-Niveau (χ^2-Test).

Zusammenfassend kann man feststellen, daß Gruppe A bezüglich der Problemaufgabenund dem Lernspiel der Gruppe B in der Planung, Auswertung und Interpretation signifikant im Sinne der Hypothese 5 überlegen ist.

7.4.4 Zusammenfassung

Die Detailauswertung hatte zum Ziel, qualitative Behandlungsunterschiede, wie sie sich in der statistischen Auswertung bei der Hypothesenprüfung andeuteten, genauer zu analysieren. Quantitative Unterschiede können aber wegen der veränderten Bewertungsgrundlage und der reduzierten Stichprobe nur dort verallgemeinert werden, wo diese auch qualitativ erkennbar sind. Im folgenden wird auf diese festgestellten Unterschiede in Verbindung mit der jeweiligen Hypothese eingegangen.

Zu Hypothese 1:

Die Anwendung der gelernten Inhalte auf Aufgaben mit mathematischem Kontext ließen bei der Gruppe A Schwächen erkennen, die im Widerspruch zu Hypothese 1 stehen. Sie betreffen:

1) die geringere Kenntnis der Konvention, daß y im allgemeinen als Platzhalter für den Wertebereich verwendet wird (OP 1 in Aufgabe 2am);
2) größere Schwierigkeiten mit der Anwendung der Steigungsformel, die in x-y-Schreibweise gelernt wurde, auf einfachste Aufgaben mit mathematischem Kontext (11am). Allerdings scheint die Überlegenheit der Gruppe B auf mechanischer Anwendung der Algorithmen zu beruhen, die sofort verschwindet, wenn es sich um Aufgaben mit physikalischer Notation handelt.

Dagegen lassen sich Behandlungsunterschiede zugunsten der Gruppe A dort feststellen, wo die Aufgabenstellung differenzierte Verhaltensweisen wie Berücksichtigung des Bereichs (OP 3), sinnvolle Auswahl von Argumenten für die graphische Darstellung analytischer Funktionen (OP10) und Kenntnis der Verfahren zur Bestimmung analytischer Funktionen aus Wertetabellen (OP24, OP25) verlangte.

Zu Hypothese 2:

Im Sinne der Hypothese 2 ist die Gruppe A signifikant besser als Gruppe B in der Berücksichtigung physikalischer Notation, besonders in Test I. Unklar bleibt, wie sich die Notationsprob-

leme der Gruppe B langfristig auf den Transfer mathematischer Kenntnisse in physikalischen Aufgabensituationen auswirken. Denn auch wenn für die isomorphen P-Aufgaben keine prinzipiellen Unterschiede im Lösungsverhalten beider Gruppen feststellbar waren, deuten sich in vielen Aufgaben Schwierigkeiten der Gruppe B mit der Berücksichtigung des physikalischen Kontexts an. So wurden öfter von Schülern dieser Gruppe analytische Darstellungen mit physikalischen Größen in x-y-Notation umgeschrieben, bevor entsprechende Transformationen durchgeführt werden konnten. Hier kündigen sich Probleme an, wie sie bei 12. Klassen und Lehrerstudenten ebenfalls deutlich wurden; nämlich die Kopplung mathematischer Methoden an den mathematischen Kontext.

Auch Behandlung A hat für Teil II wegen der Verwendung der x-y-Notation bei der Einführung der Funktionstypen und der Algorithmen zur Bestimmung von a_1 und a_0 diese Kopplung aufgebaut, die nur zum Teil durch die nachfolgende Übung aufgehoben werden konnte.

Zu Hypothese 3:

Bei der Grobauswertung über die Punktwerte ließ sich zwar eine Tendenz in Richtung auf kontextunabhängiges Verhalten in der Gruppe A erkennen, doch fielen diese Unterschiede nicht so stark aus wie erwartet. Wie schon festgestellt, muß dies darauf zurückgeführt werden, daß der Reizcharakter der Aufgabenstellung in den P-Aufgaben in hohem Maße auf die anzuwendenden mathematischen Verfahren hinwies. Besonders begünstigt wurde dies durch die zeitliche Nähe der Bearbeitung von M- und P-Aufgaben in einem Test, was wegen schulorganisatorischer Gründe nicht verändert werden konnte.
Die Feinanalyse zeigte aber, daß bezüglich der Berücksichtigung des physikalischen Kontexts signifikante Behandlungsunterschiede für isomorphe Aufgabenpaare nachgewiesen werden konnten.

Zu Hypothese 4:

Schon bei der Punktauswertung konnte für Parallelaufgaben eine Abhängigkeit der Transformationen von untergeordneten Aufgabenmerkmalen bestätigt werden. Diese Abhängigkeit ist z.T. auf mas-

sive Schwierigkeiten mit elementaren Rechenoperationen zurückzuführen. So konnte in beiden Gruppen die Tendenz festgestellt werden, daß mit dem Ansteigen des theoretischen Schwierigkeitsgrades der Rechenoperationen in bestimmten Aufgaben häufiger Fehler bezüglich Operationen gemacht wurden, die von den Schülern als "Feinheiten" der Lösung bezeichnet wurden (OP 3, OP 5, OP 9, OP10).

Deshalb müssen m.E. solide Kenntnisse in den Grundrechenarten vorausgesetzt werden, wenn so komplexe Inhalte wie die Transformation einer Wertetabelle oder eines Graphen in eine analytische Darstellung behandelt werden können. Die Schüler, die in den untersuchten Klassen nicht wissen, welches Ergebnis man für 190 - 240 oder $\frac{1}{3} \cdot 30 - 8$ erhält, hatten kaum eine Chance, im Unterricht mitzukommen.

Für den Physikunterricht kann aus dieser Abhängigkeit des Lösungsverhaltens von Parallelaufgaben bezüglich untergeordneter Aufgabenmerkmale geschlossen werden, daß keine übertriebenen Erwartungen im Hinblick auf den Transfer mathematischer Kenntnisse angenommen werden können, wenn in Mathematik nur ein niedriges Verfügungsniveau dieser Kenntnisse aufgebaut wird.

Zu Hypothese 5:

Die Ergebnisse zu den Problemaufgaben und dem Lernspiel zeigen, daß bezüglich weitreichenden Transfer in beiden Gruppen erhebliche Schwierigkeiten angenommen werden müssen. Im Besonderen wurde festgestellt:

1) Das Lesen graphischer Darstellungen bereitet offensichtlich immer noch soviel Probleme, daß bei Vorgabe zweier Graphen nur die Information des Graphen berücksichtigt wird, auf den in der Fragestellung explizit hingewiesen wird (Aufg. 13p).
2) Ein Verständnis für die Unabhängigkeit einer Größe von einer anderen im Fall eines konstanten Zusammenhangs (Aufg. 14) war nur unzureichend in Gruppe B vorhanden, während Gruppe A hiermit keine so großen Schwierigkeiten hatte.

3) Die Beschreibung von Versuchsplänen (Aufgabe 15) war für beide Gruppen kaum möglich, d.h. auch in der Gruppe A war der Anteil der Schüler, die eine klare Vorstellung vom Prozeß der Algebraisierung physikalischer Phänomene hatten, relativ gering. Auf die Abhängigkeit dieser Transformation von der Kenntnis des Funktionstypes wiesen in Gruppe A wesentlich mehr Schüler hin, während Gruppe B häufiger den Algorithmus zur Bestimmung linearer Funktionen reproduzierte.

4) Die Einbeziehung der gelernten mathematischen Verfahren in die Überlegungen zum Lösen eines offenen physikalischen Problems im Lernspiel konnte in Gruppe A weit häufiger beobachtet werden als in Gruppe B. So wurde festgestellt, daß Gruppe A:

   a) häufiger zur Lösung des Problems Modellversuche durchführen wollte, während Gruppe B stärker auf die Konstruktion des Ballons einging
   b) weniger Hilfen brauchte, um einen sinnvollen Weg in Richtung auf Modellversuche einzuschlagen
   c) häufiger in der Lage war, die Transformation GR→AD richtig auszuführen und die Ergebnisse in physikalischer Größennotation anzugeben als Gruppe B.

Angemerkt sei noch ein Ergebnis zur Analyse der FPr-Werte für P-Aufgaben, deren grundlegende Operationen (s. wichtige Operationen in den FPr-Wertetabellen, Abschnitt 7.3.1) während der Lernphase unzureichend (weniger als 3 mal) geübt wurden. Die Häufigkeiten der Operationen in den Übungen sind in Abschnitt 5.2.2 dargestellt.
Während Gruppe A 55% dieser weitreichenden Transfer verlangenden 2o P-Aufgabenteile ausreichend gekonnt haben (FPr $\leq$ 3o%), lag in Gruppe B dieser Wert nur bei 25%. Die Unterschiede sind nicht signifikant (χ^2-Test).

Allerdings lassen die Schwierigkeiten beider Gruppen mit der Übertragung ihrer mathematischen Kenntnisse auf physikalische Probleme keine übertriebenen Erwartungen bezüglich des Physikunterrichtes zu.

8. Itemanalyse der Kriteriumsaufgaben

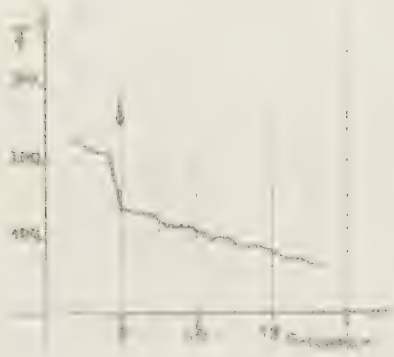
Die Prüfung der Hypothesen 1 und 2 bezüglich der FPr-Werte zu den einzelnen Aufgaben hat keine signifikanten Behandlungsunterschiede gezeigt, obwohl für viele Aufgaben eine geringe Überlegenheit der Gruppe A deutlich war. Diese Tendenz konnte in der Detailanalyse auf Probleme mit bestimmten Operationen zurückgeführt werden. Es wurde deshalb versucht, durch die Itemanalyse die Möglichkeit zur Zusammenfassung von einzelnen Aufgaben zu Aufgabengruppen (Subtests) zu untersuchen, um dadurch diese Ergebnisse auch für die Kummulation von Behandlungseffekten abzusichern. Bezüglich dieser Subtests sollten die Hypothesen 1 - 3 erneut geprüft werden.
Eine weitere Funktion der Itemanalyse ist es, die Abhängigkeit der Ergebnisse in den einzelnen Aufgaben von den kontrollierten Variablen Noten, Lese-Lern-Test, mathematischer Vorkenntnistest V1 - V3, FRT und VL 7-9 festzustellen, um eine genauere Kenntnis über den Anforderungscharakter der Kriteriumsaufgaben zu erhalten.

8.1 Ordnungsstrukturen in den Kriteriumsaufgaben

Die Strukturanalyse zur Identifizierung ähnlicher Aufgaben bediente sich der Clusteranalyse. Hierarchische Beziehungen zwischen den Aufgaben wurden mit Hilfe des GUTTMAN-Verfahrens untersucht.

8.1.1 Clusteranalyse der Kriteriumsaufgaben

Wie schon in Anmerkung 23 beschrieben, ermöglicht die Clusteranalyse eine Zusammenfassung von Ereignissen mit ähnlicher Ausprägung in den untersuchten Merkmalen. In vorliegendem Fall wurden solche Aufgaben zusammengefaßt, bezüglich derer die untersuchten Schüler ähnliches Lösungsverhalten zeigten.
Die Clusteranalyse der isomorphen Aufgabengruppen 2,4,10,11,12 für die Schüler der Gruppen[28] I - III ergab folgende 5 Aufgabengruppen:



Fehlerfunktion

Aufgabengruppe 1: 4am,4ap,4bm,4bp,11am
Aufgabengruppe 2: 2ap,2bm,2bp,10bm
Aufgabengruppe 3: 2am,10am,10ap,10bp
Aufgabengruppe 4: 11ap,11bp,11bm,12am1
Aufgabengruppe 5: 12am2,12ap

Der Verlauf der Fehlerfunktion zeigt, daß die Gruppenbildung nicht sehr ausgeprägt ist, was auf geringe hierarchische Beziehungen zwischen den Aufgabengruppen schließen läßt. Hier bestätigt sich wiederum, daß neben prinzipiellen Schwierigkeiten bezüglich bestimmter Transformationen untergeordnete Aufgabenmerkmale sehr stark das Lösungsverhalten beeinflussen. Die Clusteranalyse läßt erkennen, daß die Aufgabengruppen weitgehend Aufgaben einer Transformation zusammenfassen. Diese können wie folgt charakterisiert werden:

Gruppe	kennzeichnende Transformation	mittlerer FPr-Wert der Subtests
1	WT → GR	24%
2	AD → WT	27%
3	AD → GR	36%
4	GR → AD	50%
5	WT → AD	60%

Die Ergebnisse lassen es begründet erscheinen, die Punktwerte der einzelnen Aufgaben für gleiche Transformationen und gleichen Kontext zu Summenwerten zu addieren. Damit wird gleichzeitig angenommen, daß jeder Aufgabentyp ähnliche mathematische Anforderungen stellt. Die Punktwertsummen definieren eine Ordinalskala, sodaß nur verteilungsfreie statistische Verfahren zur Auswertung der Subtests verwendet werden können.

Weiterhin kann man feststellen, daß der Schwierigkeitsgrad für zusammengesetzte Transformationen im Sinne der logischen Analyse größer ist als für Einzeltransformationen. So ist die Transformation AD → GR schwerer als AD → WT, WT → GR und die Transformation WT → AD schwerer als WT → GR, GR → AD. Daraus kann man umgekehrt schließen, daß die Transparenz solcher zusammengesetzter

Transformationen durch Auslassung der Zwischenschritte erheblich verschlechtert wird, was für die Darstellungstransformationen im Physikunterricht wichtig ist.

8.1.2 Analyse von Ordnungsstrukturen in den Kriteriumsaufgaben mit Hilfe der GUTTMAN-Skala

Die Ergebnisse der Clusteranalyse weisen auf eine sinnvolle Gruppenbildung in den Kriteriumsaufgaben hin, sodaß die Zusammenfassung der Punktwerte von Einzelaufgaben eines bestimmten Typs zu einem Summenwert ein sinnvolles Verfahren darstellt. Wünschenswert wäre es weiterhin, die Ergebnisse aller Einzelaufgaben zu einem Gesamttestwert zusammenzufassen, da hierdurch Behandlungsunterschiede noch stärker herausgearbeitet werden könnten.
Voraussetzung dafür ist, daß man in den Aufgaben eine Ordnungsstruktur feststellen kann, die die Addition der Punktwerte begründet erscheinen läßt. Interpretierbar wären diese Summenwerte z.B. dann, wenn

1) alle Aufgaben den gleichen Inhalt und den gleichen Schwierigkeitsgrad hätten, so daß der Summenwert als Maß für das Verfügungsniveau bezüglich eines bestimmten Aufgabentyps angesehen werden darf. Dieser Fall kann nicht angenommen werden, da die Analyse der FPr-Werte und die Clusteranalyse auf heterogene Aufgabengruppen hinweisen.

oder

2) bezüglich dieser Summenwerte eine Skala konstruiert werden kann, die die Relation "Schüler a ist besser als Schüler b" homomorph auf die Relation "Summenwert A ist größer als Summenwert B" abbildet.
   Eine nicht willkürliche Definition von "besser" erhält man, wenn jedem Punktwert in der untersuchten Population eindeutig bestimmte Aufgaben zugeordnet werden können, die von dem betreffenden Schüler richtig gemacht wurden.

   Beispiel: In einem Test mit n Aufgaben müßte nachgewiesen werden, daß ein Schüler mit i Punkten die i leichtesten Aufgaben richtig und die n-i schwersten Aufgaben falsch macht. Daraus würde folgen, daß ein Schüler mit i+1 Punkten die i leichtesten Aufgaben und die i+1 leichteste Aufgabe richtig macht, die n-i-1 schwierigsten Aufgaben aber falsch. Kann solch eine Ordnungsstruktur in den Daten nachgewiesen werden, so könnte den Summenwerten definierte Schülereigenschaften und Schülerrelationen (im Sinne von "besser") zugeordnet werden.

Ein Verfahren zum Nachweis solcher Strukturen stellt die Skalogrammanalyse von GUTTMAN[29] dar, die auf folgende Fragestellungen angewendet wurde:
Kann für Gruppe A und B bezüglich isomorpher Hauptaufgabenpaare aus Test I (Aufgaben 2,4,7,10) und Test II (Aufgaben 1,11,12), jeweils getrennt für M- und P-Aufgaben eine GUTTMANSKALA nachgewiesen werden?

Ergebnisse:

1) Die Reproduzibilitätskoeffizienten (s. Anmerkung 29) liegen für alle Fragestellungen zwischen 0.8 und 0.85, was nach NIE et al. (1975, S. 533) einer nichtvaliden GUTTMANSKALA entspricht. Für die Validität der Skala wird ein Wert von größer als 0.9 gefordert, d.h. nur 10% der Antworten dürfen der aus den Daten bestimmten Ordnungsstruktur widersprechen. Die Reproduzibilitätskoeffizienten für die einzelnen Testteile sind:

	Test I		Test II	
	M-Aufgaben	P-Aufgaben	M-Aufgaben	P-Aufgaben
A	0.79	0.79	0.86	0.81
B	0.81	0.80	0.80	0.85

Tabelle der Reproduzibilitätskoeffizienten R, getrennt für Gruppe A und B

Aus den Ergebnissen der Analyse zur Aufgabenstruktur läßt sich demnach eine Zusammenfassung der Punktwerte in den Aufgaben zu einem Gesamttestwert nicht begründen, da diesen Summenwerten nicht hinreichend genau eine Relation "Schüler a ist besser als Schüler b" zugeordnet werden kann.

2) Die geringen Reproduzibilitätskoeffizienten deuten darauf hin, daß die erwartete Hierarchie aufgrund der Transformationstypen durch untergeordnete Aufgabenmerkmale sehr gestört wird. Diese Störung ist, wie die Fehleranalyse der Operationen (s. Abschn. 7.4) gezeigt hat, darauf zurückzuführen, daß bestimmte Operationen nicht sicher beherrscht werden. Dies kann auch anhand der Ergebnisse der Skalogrammanalyse bestätigt werden.

So wurden in Gruppe A die Aufgaben 2bm, 7bp,11bp2 häufig falsch gemacht oder nicht bearbeitet, obwohl Aufgaben, die nach der GUTTMANSKALA hierarchisch höher stehen (schwieriger), gelöst wurden. Wie schon bei der Operationsanalyse (s. Abschn. 7.4) festgestellt, hatte Gruppe A Schwierigkeiten mit der Interpretation von vereinfachten Pfeildiagrammen (2am, 2bm), mit der Berücksichtigung nichttrivialer Maßstäbe (7bp, Lernspiel), aber auch mit komplexen Algorithmen (11bp2). In Gruppe B ergaben sich Schwierigkeiten für die Aufgaben 1bp und 4bp, die wegen ihres physikalischen Kontexts häufiger nicht bearbeitet wurden, obwohl entsprechende mathematische Kenntnisse vorhanden waren.

3) Für Test I ist keine Abhängigkeit des Reproduzibilitätskoeffizienten vom Kontext (M/P-Aufgaben) in beiden Gruppen festzustellen. Demgegenüber ist für Test II der Koeffizient für die Gruppe A in M-Aufgaben höher als in P-Aufgaben, in Gruppe B ist es umgekehrt. Hieraus folgt, daß für die komplexeren Transformationen in Test II sich Behandlungsunterschiede zwischen den Gruppen in deutlicheren hierarchischen Strukturen für Aufgaben mit ungewohnter Notation und Kontext niederschlagen. Während Gruppe A bei M-Aufgaben einheitlicher auf Aufgabenschwierigkeiten reagiert, ist es in Gruppe B umgekehrt.

In einer weiteren Analyse mithilfe des GUTTMAN-Verfahrens wurde untersucht, ob sich nicht prinzipielle Strukturen trotz der Störeffekte für die Transformationen tendenziell nachweisen lassen. Deshalb wurde für die Gesamtpopulation und alle isomorphen Hauptaufgabenpaare die Skalogrammanalyse durchgeführt. Das verwendete Computerprogramm (s. NIE et al. (1975)) konnte nur jeweils 12 Variable auf einmal berücksichtigen. Durch Zerlegung der 22 Aufgaben in 3 sich überschneidende Gruppen konnten die Teilergebnisse zur Aufstellung einer Rangreihe entsprechend der hierarchischen Abhängigkeiten verwendet werden. Nun wurde für jede Transformation der mittlere Rang aufgrund der Ränge der einzelnen Aufgaben zu diesem Typ bestimmt:

Transformation	WT → AD	GR → AD	AD → GR	AD → WT	WT → GR
mittlerer Rang	4.4(2.5)	6.8(7.5)	14(12.5)	15.4(16.5)	18(20.5)

mittlerer Rang der Transformation (in Klammern theoretischer mittlerer Rang bei idealer[30] Hierarchie der Transformationen)

Die Ergebnisse bestätigen qualitativ die angenommene Hierarchie der Transformationen, wonach WT → AD weitgehend nur dann gelöst wird, wenn die übrigen Transformationen bekannt sind. Allerdings zeigt der Vergleich der empirisch bestimmten mit den theoretisch erwarteten Rangplätzen eine Vermischung der Transformationen in folgendem Sinne:

1) Geringe Trennung der Transformationen WT → AD und GR → AD, was sich durch geringe Schwierigkeiten mit der Transformation WT → GR begründet
2) Geringe Trennung der Transformationen AD → GR und AD → WT aus demselben Grund.

Zusammenfassend hat die GUTTMAN-Analyse zwar hierarchische Abhängigkeiten zwischen den Aufgaben erkennen lassen. Sie reichen aber nicht aus, um die Punktwerte der einzelnen Aufgaben des vorliegenden Tests mit inhomogenen Aufgaben zu einem interpretierbaren Gesamttestwert aufzuaddieren.

8.1.3 Zusammenhang zwischen den Parallelisierungsvariablen und dem Lösungsverhalten in den Kriteriumsaufgaben

Diese Analyse verfolgt das Ziel, folgende Fragen zu klären:

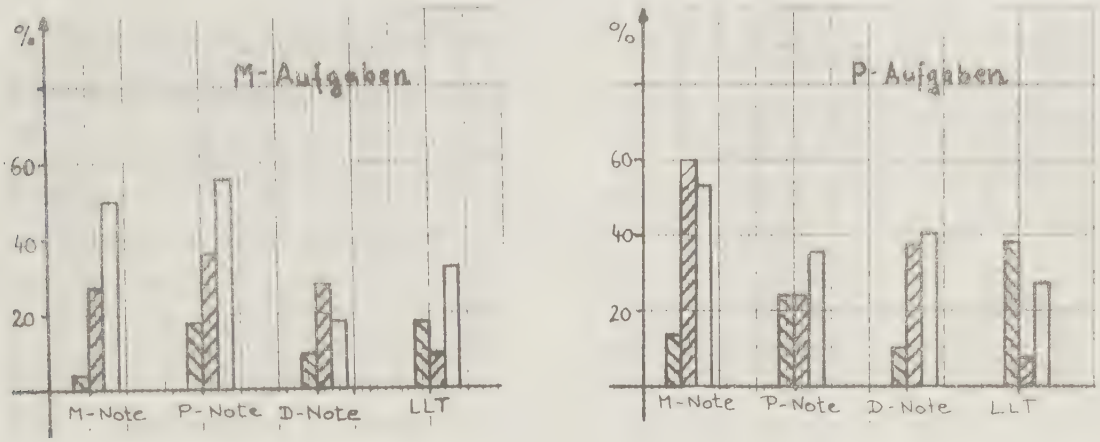
a) Besteht zwischen den Parallelisierungsvariablen und den Ergebnissen des Kriteriumtests ein signifikanter Zusammenhang, sodaß die Wahl dieser Variablen zur Parallelisierung der Gruppen sinnvoll war?
b) Ist dieser Zusammenhang unabhängig von der Behandlung?

Zur Klärung dieser Fragen wurden die Parallelisierungsvariablen in drei Klassen so eingeteilt, das sie jeweils etwa das untere, mittlere und obere Drittel der Stichprobe repräsentierten. Danach wurde bezüglich dieser transformierten Variablen für jede Aufgabe eine χ^2-Analyse gerechnet und der Prozentsatz von M- und P-Aufgaben bestimmt, für die Zusammenhänge nachgewiesen werden konnten. Zur Beantwortung obiger Fragen wurde dieses Verfahren für die Gruppe A, Gruppe B und Gruppe A+B angewendet.

Ergebnisse:

Zusammenhänge zwischen Aufgabenlösungen und Parallelisierungsvariablen

Wichtige Ergebnisse der Analyse sind in folgenden Abbildungen dargestellt:



Prozentsatz der M- und P-Aufgaben, bei denen ein signifikanter Zusammenhang mit den Parallelisierungsvariablen Mathematik-, Physik- und Deutschnote und der Variablen LLT nachgewiesen wurde.

Gruppe A Gruppe B Gruppe A + B

Die Prozentsätze der M- und P-Aufgaben mit signifikanten Zusammenhängen zu den Parallelisierungsvariablen M-, P- D-Note liegen für die Gesamtstichprobe A+B im Bereich von 18 bis 56%. Diese Zusammenhänge variieren noch sehr stark für M- oder P-Aufgaben. Insgesamt konnten signifikante Zusammenhänge zwischen den drei Noten und 70% aller Aufgaben bestimmt werden. Berücksichtigt man weiterhin nicht dargestellte Ergebnisse für die anderen Variablen FRT, VL 7-9 und V1 bis V3, so erhöht sich dieser Wert auf 83%. Daraus wird geschlossen, daß die verwendeten Parallelisierungsvariablen in ausreichendem Maß relevante Variable des Lernprozesses erfaßt haben. Im einzeln klären diese Variablen einen Teil der Varianz in folgenden Aufgabentypen:

a) Mathematiknote
   Aufgabentypen: Vorwiegend komplexe Transformationstypen wie AD → GR; (GR, WT) → AD

b) Physiknote
   Aufgabentypen: nicht geübte Operationen und Transformationen in den Zusatzaufgaben (WY ∪ GR → WX, GR → VD) und in den Problemaufgaben

c) Deutschnote
   Aufgabentypen: Aufgaben, die eine Verbalisierung der Zusammenhänge verlangen (Zusatzaufgaben zu AD → WT,

Problemaufgaben) oder in P-Aufgaben mit hoher Wortzahl (1oap, 1obp, 11ap, 11bp, 12ap)

d) Figure Reasoning Test
Aufgabentypen: Diese Variable scheint lediglich für Problemaufgabe 14p2 (Begründung für irrelevante Parameter angeben) bedeutsam

e) Verständiges-Lesen-Test
Aufgabentypen: P-Aufgaben mit hoher Wortzahl (1oap, 1obp)

f) Vorkenntnistest V1 - V3
Aufgabentypen: Mittelschwere Aufgaben mit erhöhten Rechenschierigkeiten (2am, 2bm, 2bp, 1oam, 1obm, 1obp). Dabei werden vom V1 (Rechnen mit natürlichen Zahlen) 6%, vom V2 (Rechnen mit rationalen Zahlen) 2o% und vom V3 (Gleichungen mit einer Unbekannten) 3o% aller Aufgaben erfaßt.

Einfluß der Behandlung auf die Zusammenhänge zwischen den Parallelisierungsvariablen und den Aufgabenlösungen

Es konnten qualitativ unterschiedliche Einflüsse der Behandlungen auf die Zusammenhänge festgestellt werden (s. obige Abbildungen):

Gruppe A : Hier läßt sich nur ein geringer Zusammenhang zwischen den Noten und den Aufgabenlösungen bestimmen. Demgegenüber kommt den Ergebnissen im LLT eine hohe Bedeutung für die Aufklärung von Unterschieden in den Aufgaben zu.

Gruppe B : Hier wurde dagegen sowohl für die M- wie für die P-Aufgaben eine starke Abhängigkeit der Aufgabenbearbeitung von den Noten nachgewiesen, während der Kontrollvariablen LLT in dieser Gruppe nur eine geringe Bedeutung zukommt.

Führt man diese Ergebnisse auf den unterschiedlichen Anforderungscharakter beider Behandlungen zurück, so kann man folgendes feststellen:

a) Der Erfolg bei Behandlung A bezieht sich im Sinne der Intention dieses Lehrtextes offensichtlich auf speziellere Fähigkeiten, (Anwendung mathematischer Überlegungen auf Aufgaben mit ungewohntem Kontext), wie sie vom LLT erfaßt wurden. Anforderungen, wie sie dagegen von der M-Note bewertet werden, spielen eine untergeordnete Rolle.

b) Behandlung B bezieht sich im Sinne der Intention dieses Lehrtextes in hohem Maße auf allgemeine Fähigkeiten, wie sie speziell von der M-Note erfaßt werden. D.h., wer im lehrerzentrierten Mathematikunterricht mit traditionellem Vorgehen gut war, bleibt auch gut und umgekehrt. Allerdings zeigt der Zusammenhang mit der D-Note, daß für die Lösung von P-Aufgaben zusätzlich Fähigkeiten herangezogen werden, wie sie von dieser Note erfaßt werden. Eine Analyse der Zusammenhänge zwischen der D-Note und dem VL 7 - 9, LLT lieferte keine signifikanten Kontingenzkoeffizienten. Dagegen konnte eine relativ hohe Korrelation (r_{CC} = 0.43) zwischen der D-Note und der P-Note festgestellt werden. Deshalb wird angenommen, daß die Lösung von P-Aufgaben in Gruppe B in hohem Maße durch Fähigkeiten bedingt ist, die in anderen Fächern aufgebaut oder zumindest bewertet werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse zur Aufgabenanalyse

1) Die Untersuchung der Datenstruktur mit Hilfe der Clusteranalyse rechtfertigt die Zusammenfassung von Aufgaben eines Transformationstyps zu Subtests.

2) Die GUTTMANSKALA läßt hierarchische Strukturen im Sinne der logischen Analyse der Schwierigkeitsgrade der Transformationen erkennen. Sie sind aber nicht so klar, daß sie die Zusammenfassung der Punktwerte einzelner Aufgaben zu einem interpretierbaren Summenwert rechtfertigen könnten.

3) Die Ergebnisse der Analyse der Zusammenhänge zwischen dem Lösungsverhalten in den Kriteriumsaufgaben und den Parallelisierungsvariablen hat deutliche Behandlungsunterschiede erkennen lassen. Während in Gruppe B die Lösung der Aufgaben in engerem Zusammenhang zur Mathematik- und Deutsch-Note steht, tritt in Gruppe A die stärkere Abhängigkeit der Aufgabenlösung von einer schon vor Beginn der Behandlung vorhandenen Fähigkeit zum Transfer mathematischer Kenntnisse auf Aufgaben mit ungewohnter Notation und Kontext hervor.

7.3.2 Beschreibung der Ergebnisse zu den Subtests und Hypothesenprüfung

Aufgrund der Itemanalyse erscheint die Bildung von Subtests zu den einzelnen Transformationen, für M- und P-Aufgaben getrennt, sinnvoll. Die folgende Tabelle gibt die Fehlerprozente für die einzelnen Subtests, getrennt für Gruppe A und B wieder:

Subtest	Transformation	Zusammengefaßte Aufgaben	Fehlerprozente Gruppe A	Fehlerprozente Gruppe B
M1	AD → WT	2am, 2bm	29	37
P1		2ap, 2bp	24	29
M2	WT → GR	1am, 1bm	21	23
P2		1ap, 1bp	25	22
M3	AD → GR	10am, 10bm	29	30
P3		10bm, 10bp	34	43
M4	WT, GR → AD+	11am1, 11bm1, 12am1	50	37
P4		11ap1, 11bp1, 12ap1	52	51
M5	WT → VD	2amZ, 2bmZ	32	35
P5		2apZ, 2bpZ	23	37
M6	WY ∪ GR → WX	10amZ, 10bmZ, 11amZ, 12amZ	26	34
P6		10apZ, 1PbpZ, 11amZ, 12apZ	34	39
M7	VY ∪ GR → WX	4amZ, 7bm	19	21
P7		4apZ, 7bp	21	25

Tabelle der FPr-Werte (%) für die einzelnen Subtests.

+hier wurde nur der Aufgabenteil berücksichtigt, der allen drei Aufaben gleich war (Bestimmung von a_1)

Prüfung der Hypothesen 1 - 3, bezogen auf Subtests

Wie schon festgestellt, sollten die Hypothesen 1-3, die für einzelne Aufgaben formuliert waren, auch bezüglich der Subtests geprüft werden.

Hypothese 1 lautet dann:
Bezüglich der Lösung von Subtests zu M-Aufgaben (M1-M7) besteht kein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B.

Ergebnis: Hypothese 1 konnte für keinen Subtest widerlegt werden. Lediglich für Subtest M4 (Bestimmung der Steigung) deuten sich Unterschiede auf dem 10%-Niveau zugunsten der Gruppe B an. Hierauf wurde schon bei Prüfung der Hypothesen zu den einzelnen Aufgaben eingegangen (s. Abschn. 7.3.2).

Hypothese 2 lautet dann:
Bezüglich der Lösung von Subtests zu P-Aufgaben (P1-P7) besteht

ein signifikanter Unterschied zwischen Gruppe A und B zugunsten Gruppe A.

Ergebnis: Diese Hypothese 2 konnte bei Prüfung der Nullhypothese (zweiseitige Fragestellung) nur für Subtest P5 (Verbalisierung von Wertetabellen) bestätigt werden, sodaß auch für Subtests keine generelle Überlegenheit der Gruppe A bei Aufgabengruppen mit physikalischem Kontext festgestellt werden konnte.

Hypothese 3 lautet dann:
Bezüglich isomorpher Subtests bestehen signifikante Unterschiede im Schwierigkeitsgrad für Gruppe B, aber nicht für Gruppe A.

Ergebnis: Folgende Tabelle gibt einen Überblick über signifikante r_{CC}-Äquivalente der Kontingenzkoeffizienten (s. LIENERT, (1961),S.292) zwischen isomorphen Subtests und über signifikant schwerere Subtests zu M- oder P-Aufgaben (geprüft mit McNemar-Test, s. SIEGEL (1976),S.60-65) getrennt nach Gruppe A und B:

		Subtests zu Hauptaufgaben				Subtests zu Zusatzaufgaben		
		M1/P1	M2/P2	M3/P3	M4/P4	M5/P5	M6/P6	M7/P7
A	r_{CC}	0.41	0.57	0.67	0.60	n.s.	0.57	0.25
	McNemar	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.	n.s.
B	r_{CC}	0.29	0.51	0.55	0.49	0.35	0.60	0.25
	McNemar	n.s.	n.s.	P	P	n.s.	n.s.	n.s.

Erläuterung: Ein P in der Zeile "McNemar" bedeutet "Subtest zu P-Aufgaben ist signifikant schwieriger als Subtest zu M-Aufgaben".

Die Schreibweise M1/P1 gibt an, daß hier der Zusammenhang zwischen Subtest M1 und Subtest P1 wiedergegeben wird; M2/P2 bezieht sich auf den Zusammenhang zwischen Subtest M2 und P2 usw.

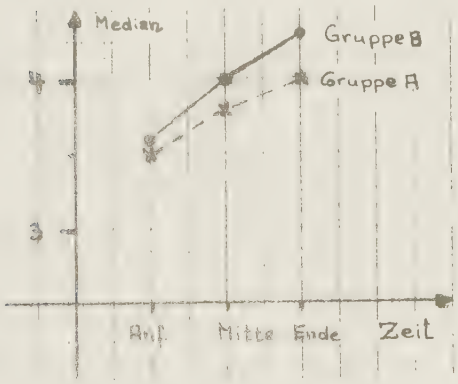
Im Sinne der Hypothese 3 konnte für die Subtests zu den Transformationen AD→GR (M3/P3) und (GR,WT)→AD (M4/P4) ein signifikanter Schwierigkeitsunterschied zwischen M- und P-Aufgaben in Gruppe B festgestellt werden. Unterstützt wird dieses Ergebnis durch deutlich höhere Zusammenhänge (r_{CC}-Koeffizienten) für die Subtests zu den Hauptaufgaben in Gruppe A.
Deshalb wird angenommen, daß die Behandlung A im Sinne der Hypothese 3 wirkte, auch wenn die Unterschiede schwächer sind als erwartet.

Nebenbefunde der Arbeit

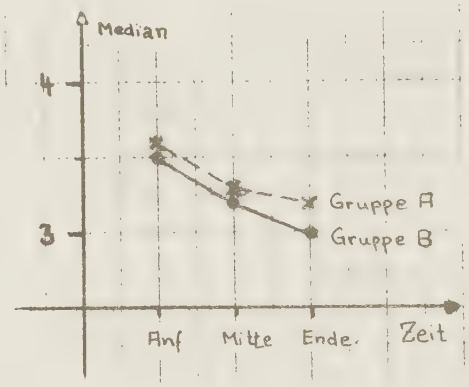
Weitere Ergebnisse der Arbeit beziehen sich auf subjektive Einstellungsurteile zum Lernen nach Lehrtexten in Bezug auf den vorherigen Lehrerunterricht. Die Ergebnisse zur subjektiven Schwierigkeit und Sicherheit in den Aufgaben konnten wegen der Unregelmäßigkeit der Angaben in den Gruppen nicht ausgewertet werden.

A Interesse am Lehrer- und Lehrtextunterricht

Der zeitliche Verlauf des Interesses am Lehrtextunterricht wurde durch zwei Einstellungsskalen, die jeweils am Anfang, Mitte und am Ende der Untersuchung beantwortet wurden, erfaßt. Dabei sollten die Schüler ihr Interesse am Lehrer- und Lehrtextunterricht auf einer Skala von 1 - 7 wiedergeben. Die Mediane der Urteile, getrennt für Gruppe A und B sind in folgendem Graph dargestellt:



Lehrbuchunterricht



Lehrerunterricht

Erläuterung: Die Skala ging von 1 (große Zustimmung) über 4 (neutral) bis 7 (große Ablehnung).

Ergebnis:

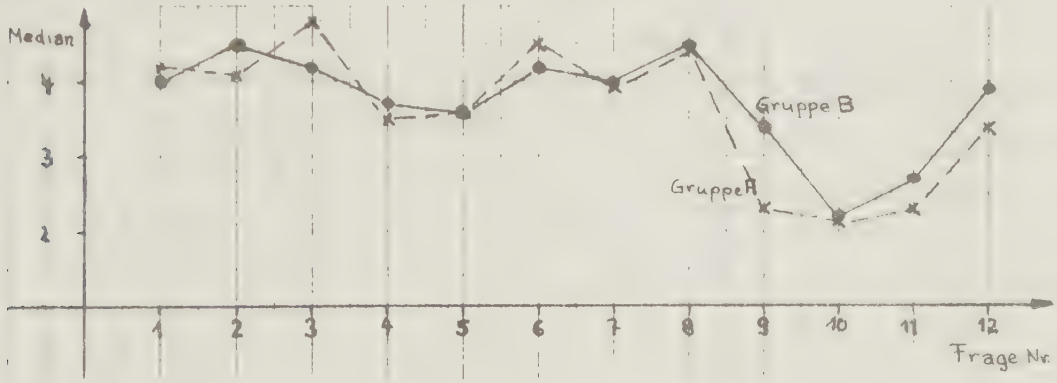
1) Der Lehrtextunterricht wird mit der Dauer der Untersuchung uninteressanter (unbeliebter), wobei in Gruppe B diese Tendenz größer als in Gruppe A ist. Die Schüler bemerkten hierzu, daß der Lehrtextunterricht nicht so abwechslungsreich sei, wie der Lehrerunterricht. Wegen methodischer Probleme der Kontrolle der Behandlung war ein Wechsel der Unterrichtsform nur in geringem Maße möglich, sodaß diese Reaktion der Schüler verständlich ist.

2) Die Distanz des Lehrtextunterrichts zum Lehrerunterricht wird vergrößert durch das gleichzeitig anwachsende Interesse am Lehrerunterricht. Da hier diese Tendenz für Gruppe A geringer als für Gruppe B ist, vergrößert sich der Abstand zwischen den Gruppen zugunsten von Gruppe A. Die Unterschiede sind aber nicht signifikant.

B Einschätzung der Aktivitäten des Lehrtextunterrichts im Vergleich zum Lehrerunterricht

Jeweils am Ende jedes Kurses wurde allen Schülern ein Einstellungsfragebogen mit 12 Fragen zu verschiedenen Aspeskten des Lehrtextunterrichts (Arbeitsbelastung, Unterrichtssituation, selbständiges Arbeiten, Schwierigkeitsgrad) im Vergleich zum Lehrerunterricht zur Beurteilung vorgelegt. Die Beurteilungsskala ging von 1 - 7 (1 ≙ max. Ablehnung, 4 ≙ neutral, 7 ≙ max. Zustimmung).

Die Mediane beider Gruppen zu den 12 Fragen (s. Anhang 1.3) sind folgendem Graphen zu entnehmen:



Erläuterungen: Zum Verständnis der mitgeteilten Ergebnisse wird stichwortartig der Inhalt der statements beschrieben:

Im Lehrtextunterricht
1: wird M-Note besser
2: ist Arbeit im Unterricht größer
3: ist Arbeit zuhause größer
4: ist Lernleistung besser
5: ist Arbeitsatmosphäre im Unterricht besser
6: sind Diskussionen eher möglich
7: sind Gespräche über Mathematik eher möglich
8: ist Konkurrenz zwischen Schülern größer
9: ist zuhause nacharbeiten weniger möglich
10: selbständiges Arbeiten weniger möglich
11: ist Abhängigkeit vom Lehrer größer
12: ist Schwierigkeitsgrad geringer

Ergebnis:

1) In beiden Gruppen herrscht die Einstellung vor, daß durch den Einsatz von Lehrtexten ein Nacharbeiten (Frage 9), selbständiges Arbeiten (Frage 10) sehr begünstigt wird und die Abhängigkeit vom Lehrer (Frage 11) sich verringert. Für Frage 9 wurde mit dem Mediantest (s. SIEGEL (1976),S.108-112) ein signifikanter Unterschied zwischen den Gruppen festgestellt.

2) In Gruppe A wird zusätzlich die Arbeitsbelastung zuhause (Frage 3) und der mögliche Schwierigkeitsgrad von Inhalten in Lehrtexten (Frage 12) höher eingeschätzt als beim Lehrerunterricht. Für Frage 12 ist der Unterschied zwischen den Gruppen signifikant. Gruppe A begründete die erhöhte Arbeitsbelastung mit den ungewohnten Übungsaufgaben und zusätzlicher Arbeit am Lehrtext, was beim normalen Unterricht nicht notwendig, aber auch nicht möglich ist. Z.T. ist die zusätzliche Arbeitsbelastung zuhause dadurch zu erklären, daß die Arbeit am Lehrtext A wegen seines größeren Umfangs (20% mehr Seiten) eher auf den Hausaufgabenbereich ausgedehnt wurde. Der mögliche höhere Schwierigkeitsgrad der Inhalte im Lehrtextunterricht wurde von Gruppe A wie folgt begründet:
   a) Das Vorliegen des Lehrtextes ermöglicht wiederholtes Lesen nicht sofort verständlicher Passagen, besonders in Verbindung mit den Übungen. (Dies wurde auch von Gruppe B festgestellt.)
   b) Die ungewohnte Verbindung der Mathematik mit nichtmathematischen Bereichen sei anschaulicher als im normalen Unterricht.

3) In der Diskussion über die Ergebnisse des Einstellungsfragebogens bemerkten einzelne Schüler:

   - Die Lernleistung im Unterricht (Frage 4) sei schlechter, weil man nichts erzählt bekommt. Es sei einfach zu schwierig, sich ständig alles selbst zu erarbeiten. Im Lehrerunterricht könne man zu jedem Zeitpunkt fragen und man müsse nicht so still sein.
     Einzelne Schüler in Gruppe A bemerkten außerdem, daß man in Mathematik sich nur mit mathematischen Dingen beschäftigen sollte, da man ja Mathematik lernen wolle.

- Diskussionen und Gespräche zwischen den Schülern (Frage 6 und 8) erscheinen den Schülern in beiden Gruppen eher möglich. Besonders vorteilhaft empfanden sie es, daß sie im Fall von Verständnisschwierigkeiten jeweils auf den Lehrtext zurückgreifen konnten. Dabei machen die nichtmathematischen Inhalte auch Diskussionen über Sachverhalte möglich, die nicht direkt in Verbindung zu mathematischen Inhalten stehen. In Gruppe A mußten solche Diskussionen teilweise abgebrochen werden, um die zeitliche Koordination beider Gruppen aufrecht zu erhalten.
  Die stärkere Anregung der Schüler durch Lehrtext A für Teil I ließ sich objektiv dadurch bestätigen, daß bei einer Auszählung der Fragen auf den Antwortbogen in Gruppe A mehr als doppelt so viele Fragen gestellt wurden als in Gruppe B. Dabei bezogen sich etwa 30% der Fragen auf nichtmathematische Inhalte ("Was ist ein Intelligenzquotient? Ist die Nichtbeachtung von Schülern wirklich so schlimm? Was ist eine Hypothese?").
- In der Diskussion auffallend war, daß z.T. gute Schüler in beiden Gruppen sich heftig über den Lehrtextunterricht beschwerten. Dies konnte schon während der Untersuchung beobachtet werden. Von den Lehrern wurde darauf hingewiesen, daß diesen Schülern wahrscheinlich die Bestätigung im Wechselgespräch mit dem Lehrer fehlte. Der Versuch, diese unzufriedenen Schüler zu einer Tutorentätigkeit anzuregen, scheiterte.
- Die Frage, warum der Gruppe B die Arbeitsbelastung im Unterricht größer als in Gruppe A erschien, konnte nicht geklärt werden. Wahrscheinlich ist dies eine Folge der größeren Verärgerung der Schüler der Gruppe B durch den abstrakten Lehrtextunterricht, die sich in den Ergebnissen zum Interesse am Lehrtextunterricht (s.o.) andeutete.

Zusammenfassend kann man feststellen, daß der Lehrtextunterricht über längere Zeit bei den Schülern wegen der Einseitigkeit und Schwierigkeit negative Einstellungen hervorruft, auch wenn die Möglichkeiten im Hinblick auf selbständiges Arbeiten von den Schülern beider Gruppen gesehen werden. Festzuhalten ist, daß

die Entwicklung und Verwendung von schülergerechten Lehrbüchern mit anwendungsorientierten Beispielen im Lehrerunterricht ein wichtiges Mittel zur Erhöhung der Effektivität des Unterrichts darstellen kann. Denn nur hierdurch wird ein Nacharbeiten der Inhalte möglich, die man im Unterricht nicht verstanden hat. Versäumt man es, den Schülern frühzeitig neben dem Lehrer weitere Informationsquellen bereitzustellen, die sie sinnvoll nutzen können, so vertut man die Chance, den Schülern selbständiges Arbeiten als Technik beizubringen (s. hierzu auch WELTNER, 1976).

10. Zusammenfassung

Untersuchungsziel

Den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit bildeten Schwierigkeiten der Schüler im Physikunterricht bei der Benutzung und Anwendung mathematischer Verfahren. Es wird festgestellt, daß im Mathematikunterricht vermittelte und im mathematischen Kontext verfügbare Operationen im Kontext der Physik nicht oder nur weniger sicher anwendbar sind (Transferproblem; s. Abschnitt 1.4).
Die geltenden Lehrpläne in Mathematik und Physik (s. Abschnitt 3.2) stimmen dahingehend überein, daß die für den Physikunterricht grundlegenden Mathematikkenntnisse weitgehend im Mathematikunterricht (auch im Hinblick auf mögliche Anwendungen) behandelt werden sollen. Dennoch verbleibt das Problem, daß die angesprochenen mathematischen Kenntnisse im Physikunterricht nur unzureichend aktiviert werden können. Damit wird der Unterricht in Physik nicht nur mit den Schwierigkeiten physikalischer Begriffsbildung, sondern zusätzlich auch mit mathematischen Schwierigkeiten der Schüler belastet. Die Auswirkungen treffen in erster Linie die Didaktik der Physik. Die Didaktik der Mathematik kann demgegenüber wegen einer von den Anwendungssituationen losgelösten Zielsetzung (Strukturmathematik) diese Probleme ignorieren. Das ist der Grund, warum zunehmend Physikdidaktiker sich mit der Verbesserung von Mathematikunterricht im Hinblick auf die Anwendungen beschäftigen.

Mit der vorliegenden Untersuchung sollte geklärt werden

a) welche Transferprobleme bei physikalischen Aufgaben für Schüler auftreten, die Mathematik ausschließlich an Beispielen in x-y-Notation und mathematischem Kontext gelernt haben
b) inwieweit durch einen konsequent anwendungsorientierten Mathematikunterricht der Transfer zur Physik verbessert werden kann. Im Falle positiver Ergebnisse wäre damit eine Richtung möglicher Reformen des Mathematikunterrichts im angestrebten Sinne angebbar.

Untersuchungsplan

Eine wesentliche Ursache für die mangelnde Aktivierung mathematischer Kenntnisse in Anwendungssituationen wird in der Vernachlässigung eben dieser Anwendungen im Mathematikunterricht gesehen. Die der Arbeit zugrundeliegende Hypothese ist, daß dieser Mangel

behoben werden kann, wenn der Schüler im Mathematikunterricht in der Einführungs- und Übungsphase konsequent mit anwendungsorientierten Beispielen konfrontiert wird. Die Berücksichtigung von solchen Beispielen in der Einführungsphase erscheint deshalb wichtig, damit ein von späteren Transfersituationen isolierter Aufbau mathematischer Strukturen von vorneherein vermieden wird.

Die Prüfung der Hypothese erfolgte in zwei Abschnitten:

1) Konzipierung und Entwicklung eines anwendungsorientierten Lehrgangs, der das für die Physik zentrale Gebiet "Relationen und Funktionen" zum Gegenstand hatte.
2) Einen empirischen Nachweis der Wirksamkeit dieses anwendungsorientierten Lehrgangs (Behandlung A) im Vergleich mit einem traditionellen Lehrgang (Behandlung B) aufgrund eines Parallelgruppenversuchsplans.

Die beiden Behandlungen lassen sich charakterisieren:

Behandlung A: Anwendungsorientierte Lehrsequenz mit <u>nichtphysikalischen</u> Beispielen in der Einführungs- und Übungsphase. Übergeordnete Fragestellung des Unterrichts: "Beschreibung von Untersuchungsergebnissen mit Hilfe der Relationen und Funktionen". In den Beispielen wird sowohl die Notation als auch der Kontext ständig gewechselt. Durch die Beschränkung auf nichtphysikalische Beispiele wird eine Überlegenheit der Behandlung A aufgrund trivialen Transfers ausgeschlossen.

Behandlung B: Konventionelle Lehrsequenz mit Beispielen, die sich ausschließlich auf x-y-Notation und mathematischen Kontext beziehen und jeden Hinweis auf mögliche Anwendungssituationen vermeiden. Dieser Unterricht entspricht weitgehend dem Vorgehen in den Mathematikbüchern.

Die Auswahl, Gewichtung und Sequenzierung der mathematischen Inhalte waren in beiden Behandlungen identisch und berücksichtigten die Bedürfnisse des Physikunterrichts (s. Kapitel 3).
Um den Einfluß der Lehrerpersönlichkeit auf den Unterricht zu reduzieren, wurde der Unterricht weitgehend apersonal erteilt und als leitprogrammunterstütztes Selbststudium organisiert. Dafür

mußten zwei Lehrpakete entwickelt werden. Sie bestanden aus:

a) den Lehrtexten (~ 55 Seiten), in denen die Inhalte vermittelt wurden
b) den Leitprogrammen (~ 15 Seiten) mit Arbeitsanleitungen und Übungsaufgaben
c) den Antwortbögen (~ 14 Seiten), in denen die Schüler ihre beim Lesen entstandenen Fragen und Ergebnisse zu den Übungsaufgaben notieren konnten. Weiterhin enthielten sie die für die Rückkopplung wichtigen Lösungen zu den Aufgaben.

Zur Kontrolle der für die Behandlung als relevant angesehenen Vorkenntnisse dienten die letzten Mathematik-, Physik- und Deutschnoten, der Test "Verständiges Lesen" (VL 7-9), der Figure Reasoning Test (FRT), ein selbstentwickelter mathematischer Vorkenntnistest V1-V4 und ein Lese-Lern-Test (LLT).
Die Wirkung der Behandlung wurde mit Hilfe folgender Aufgabentypen erfaßt:

a) Isomorphe Mathematik- und Physikaufgaben, die sich sowohl auf häufig geübte, als auch auf nicht oder weniger geübte Darstellungstransformationen von Funktionen bezogen. Ein Aufgabenpaar wird isomorph genannt, wenn die gleichen mathematischen Operationen zur Lösung dieser Aufgaben angewandt werden müssen.
b) Physikalische Problemaufgaben, die nicht mit den gelernten Algorithmen lösbar waren
c) Offene physikalische Fragestellung (Lernspiel) zur Erfassung von Strategien bei der Bestimmung des analytischen Zusammenhangs zwischen zwei physikalischen Größen.

Der Untersuchungszeitraum lag bei etwa 8 Wochen pro Klasse. Die Auswertung stützte sich auf 61 parallelisierte Schülerpaare (N=122) aus 4 Parallelklassen (8. und 9. Klasse, Gymnasium), die etwa 2/3 der untersuchten Schülern entsprachen.

Wichtige Untersuchungsergebnisse

Ihre Darstellung orientiert sich an Gemeinsamkeiten und Unterschieden in den Behandlungsergebnissen beider Gruppen.

A Gemeinsamkeiten

1) Die mathematischen Lösungsansätze für solche isomorphen Math-

matik- und Physikaufgaben, die sich auf häufig geübte Transformationen in beiden Behandlungen bezogen, lassen keine generellen, statistisch abgesicherten Unterschiede zwischen den Gruppen erkennen, obwohl für fast alle diese Aufgaben Gruppe A im Sinne der Annahmen etwas besser war. Dieses unerwartete Ergebnis zeigt, daß ein traditioneller Unterricht nach Behandlung B einen ausreichenden Transfer von Algorithmen (gelernt an x-y-Beispielen) auf ähnliche Aufgabensituationen mit physikalischem Kontext gewährleistet. Probleme des Physikunterrichts bezüglich der im Mathematikunterricht behandelten Aufgabentypen sind deshalb zum großen Teil auf unzureichende mathematische Kenntnisse und nicht auf Transferschwierigkeiten zurückzuführen.

2) Beide Gruppen waren in der Lage, sich weitgehend selbstständig die Lehrtextinhalte mit Hilfe der Leitprogrammunterstützung zu erarbeiten. Die Leistungen wurden von den beteiligten Lehrern als vergleichbar zum Lehrerunterricht bewertet. Schüler beider Gruppen beurteilten den Einsatz von schülergerechten, leitprogrammunterstützten Lehrtexten sehr positiv für die Nacharbeitung, Förderung des selbstständigen Lernens und der Unabhängigkeit vom Lehrer.

B Unterschiede

1) Bezüglich der Anwendung von nicht oder wenig behandelten Transformationen und Operationen auf isomorphe Physikaufgaben, physikalische Problemaufgaben und das Lernspiel (weitreichende Transferaufgaben) konnte eine Überlegenheit der Gruppe A im Sinne der Annahmen statistisch nachgewiesen werden. Im einzelnen betrafen die Unterschiede:
   a) Aufgaben des Subtests P5, die die Verbalisierung von Zusammenhängen physikalischer Größen in Wertetabellen verlangten (Unterschiede zwischen Gruppen ~ 15%)
   b) physikalische Problemaufgaben, die die Analyse graphisch dargestellter Zusammenhänge und die Kenntnis über das Vorgehen zur Bestimmung analytischer Darstellungen verlangten (Unterschiede zwischen Gruppen ~ 30%).

c) das Lernspiel, das die Kenntnis der Strategie physikalischer Versuchsplanung und Auswertung abprüft (Unterschiede zwischen Gruppen ~ 3o%)

d) Für 2o Physikaufgabenteile, deren grundlegende Operationen weniger als 3 mal in den Übungsaufgaben geübt wurden, ergab sich für Gruppe A eine ausreichende Lösungswahrscheinlichkeit (Prozentsatz der Fehler ≤ 3o%) in 55% der Fälle, in Gruppe B nur in 25% der Fälle.

2) Generell wurde in Gruppe B die physikalische Notation (Größennotation; OP1 und OP2) in der Ergebnisdarstellung zu den Physikaufgaben nur unzureichend berücksichtigt (Unterschiede zwischen Gruppen ~ 5o%). Bei der statistischen Prüfung der Hypothesen wurde von einer Bewertung der Notationsfehler zugunsten der mathematischen Lösungsansätze abgesehen. Die Operationsanalyse ließ aber erkennen, daß der Kontextwechsel in Physikaufgaben erhebliche Probleme in Gruppe B auslöste. Sie führten zwar selten zum Abbruch der Lösung oder falschen mathematischen Ergebnissen in den ausreichend geübten Aufgabentypen. Viele Schüler dieser Gruppe konnten die gelernten mathematischen Verfahren aber erst dann auf die Physikaufgaben anwenden, wenn sie die physikalische Notation in x-y-Notation umgeschrieben haben. Die Antworten zu den Zusatzaufgaben zeigten, daß durch diese Transformation der Aufgabenkontext irreversibel verändert wurde (s. Überlegenheit der Gruppe A bei Subtest P5). Die Schwierigkeiten der Gruppe B mit dem physikalischen Kontext werden ebenfalls durch die Analyse der Lösungszusammenhänge isomorpher Mathematik- und Physikaufgaben bestätigt. Die Kontingenzkoeffizienten für diese Aufgabenpaare lagen in Gruppe A im Mittel höher als in Gruppe B. Hieraus wurde auf ein konstanteres Lösungsverhalten der Gruppe A bei Kontextwechsel geschlossen.

3) Gruppe B war Gruppe A bei der Anwendung des Steigungsalgorithmus auf die einfachste Mathematikaufgabe dieses Typs (11am) signifikant überlegen. Eine Analyse dieses Effektes ergab, daß Behandlung B wegen der einheitlichen Notation von Steigungsformel und Übungsaufgaben mechanisches Lernen dieses Algorithmus begünstigte. Wegen der Art der Übungsaufgaben wurde in Gruppe A diese Lernform erschwert. Die übrigen Aufgaben zu

diesem Transformationstyp zeigen aber, daß die Überlegenheit der Gruppe B auf diese einfachste Aufgabe beschränkt bleibt.

4) Wechselwirkung zwischen Schülermerkmalen und Behandlung.
Der Untersuchung liegen Parallelgruppen hinsichtlich bestimmter Merkmale zugrunde. Bei der Prüfung der Relevanz dieser Parallelisierungsmerkmale für die Lernergebnisse ergaben sich zwischen beiden Behandlungen wesentliche Unterschiede in den Zusammenhängen der einzelnen Variablen mit den Testaufgaben. (Als Maß für den Zusammenhang werden die Prozentsätze der Aufgaben, die signifikant mit den jeweiligen Variablen korrelieren, angegeben; Prüfstatistik: χ^2- Test):

a) Die Lernergebnisse in Gruppe A stehen in engem Zusammenhang mit den Ergebnissen zum Lese-Lern-Test(LLT), der als Vortest den Transfer mathematischer Kenntnisse, gelernt an Beispielen in x-y-Notation, auf Aufgaben mit veränderter Notation und Kontext verlangte (Prozentsatz der korrelierenden Aufgaben: ~ 3o%). Der Zusammenhang mit allgemeineren Leistungsvariablen "Noten", speziell der Mathematiknote, war demgegenüber relativ gering (Prozentsatz:~1o%). Der Erfolg in Behandlung A begründet sich deshalb weit stärker auf die Fähigkeit zum Transfer mathematischer Kenntnisse auf Aufgaben mit ungewohntem Kontext, als auf die Fähigkeiten, wie sie von der Mathematiknote erfaßt werden. Daraus wird gefolgert, daß Behandlung A diese Fähigkeit im angenommenen Sinne übt.

b) Demgegenüber besteht in Gruppe B ein hoher Zusammenhang zwischen allgemeineren Leistungsvariablen (Mathematik-, Physik- und Deutschnoten) und den Aufgabenlösungen (Prozentsatz für Mathematiknote: ~ 45%). Der Lese-Lern-Test differenziert dagegen nur schlecht zwischen guten und schlechten Schülern dieser Gruppe (Prozentsatz:~1o%). Diese Ergebnisse werden als Zeichen für die Verwirklichung einer traditionellen Behandlung im Sinne der Intention des Lehrtextes B angesehen, der weitgehend auf Verhaltensweisen aufbaut, wie sie von der Mathematiknote erfaßt werden. Daraus folgt ebenfalls, daß Behandlung B an der Rangreihe der Schüler bezüglich der Mathematiknote wenig verändert hat.

Über ähnliche Ergebnisse berichtete auch RIEDEL (1973, S. 226) in seiner Untersuchung über Lehrhilfen zum entdeckenden Lernen. Für die problemorientierte Lehrsequenz stellte er eine Abhängigkeit des Transfers in den Testaufgaben von speziellen und kurzfristig nicht beeinflußbaren Fähigkeiten fest, während die Leistungen für die ergebnisorientierten Hilfen stärker mit der allgemeinen Denkfähigkeit korrelieren.

5) Einstellungen zum Lehrtextlernen.
Signifikante Unterschiede in den Einstellungen zum Lehrtextlernen (am Ende des Kurses durch einen Fragebogen erfaßt) ergaben sich bezüglich der Beurteilung des Schwierigkeitsgrades der Lehrtexte: Gruppe A beurteilte ihren Lehrtext signifikant leichter als Gruppe B. Dies wird von den Schülern mit der Unterstützungsfunktion der anwendungsorientierten Beispiele für das Lernen mathematischer Inhalte begründet. Anzumerken ist ebenfalls, daß in Gruppe A der Widerstand gegen das Lernen nach Lehrtexten im Untersuchungszeitraum langsamer anwuchs als in der anderen Gruppe.

Zusammenfassund lassen sich die wichtigsten Ergebnisse eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts im Vergleich zu einem traditionellen Unterricht wie folgt beschreiben:

1. Die Lernergebnisse bezüglich der mathematischen Inhalte, die ausführlich geübt werden, sind im Gegensatz zur Grundhypothese dieser Arbeit generell nicht besser als bei einem traditionellen Vorgehen. Die Annahme, innerhalb von 8 Wochen durch eine anwendungsorientierte Behandlung eine wesentliche Verbesserung der Mathematikkenntnisse zu bewirken, muß deshalb zurückgewiesen werden.

2. Die Anwendung dieser Kenntnisse auf physikalische Aufgabensituationen, die in ihrer mathematischen Struktur und Fragestellung den häufig behandelten mathematischen Problemtypen der Lernphase entsprechen, wird dahingehend verbessert, daß Schüler eher den physikalischen Kontext der Aufgabenstellung bei ihren Antworten berücksichtigen.

3. Der Lernerfolg begründet sich z.T. auf Fähigkeiten (Bereitschaft, sich auf Aufgaben mit ungewohntem Kontext einzustellen), die im traditionellen Mathematikunterricht nicht in dem Maße angesprochen werden.

4. Der Transfer mathematischer Kenntnisse auf physikalische Problemsituationen wird verbessert.

5. Der subjektive Schwierigkeitsgrad mathematischer Inhalte wird verringert.

Pädagogische Folgerungen aus den Ergebnissen für dem Physik- und Mathematikunterricht:

A Physikunterricht

Die mathematische Darstellung von Zusammenhängen zwischen physikalischen Größen im Physikunterricht hat die Funktion, Untersuchungsergebnisse so zu strukturieren, daß der Schüler diese Zusammenhänge erkennen, behalten und auf ähnliche Situationen übertragen kann. Die Analyse der Physikbücher weist darauf hin, daß die in der Physik als Wissenschaft verwendeten einfachsten, aber auch abstraktesten Darstellungen (Formeln) ebenfalls häufig verwendet werden. Lernpsychologisch sinnvoll ist die Verwendung dieser Darstellung nur dann, wenn der Schüler sowohl den Transformationsprozeß "Phänomen $\rightleftarrows$ analytische Darstellung" nachvollziehen als auch den Informationsgehalt der Darstellung nutzen kann. Ergebnisse der Untersuchung haben gezeigt, daß die in den Rahmenrichtlinien vorgegebene Unterrichtszeit nicht ausreicht, um solche Darstellungstransformationen (WT, GR $\rightarrow$ AD) selbst für einfachste Funktionen ausreichend verständlich zu machen. Die Praxis in den Physikschulbüchern widerspricht diesem Ergebnis insofern, als dort Darstellungstransformationen, die den Algebraisierungsprozeß erläutern könnten (WT $\rightarrow$ GR $\rightarrow$ AD), weitgehend fehlen.

Damit aber scheint die Selbstverständlichkeit in den Physikbüchern, Transformationen quasi nebenher zu behandeln, unberechtigt und impliziert in hohem Maße, daß physikalische Formeln nur mechanisch gelernt werden. Im engen Zusammenhang hiermit müssen Ergebnisse einer Studie des Autors in zwei 6. und 7. Klassen Gymnasium gesehen werden, die zeigen, daß 45% dieser Schüler mit Physik "Formeln, schwere Formeln, Formelkram" assoziieren. Für höhere Klassen wurde von LAWRENZ (1976, S. 321) in einer Untersuchung über die negative Entwicklung affektiver Beziehungen bezüglich des Physikunterrichts festgestellt:

> "Perhaps interest loss could be abated by presenting physical science material in such a way that students would find it easier and, therefore, less threatening. Since a major difference between introductory biological and physical sciences is the use of formulas and mathematics, one way to make the physical science easier might be to have less emphasis on its related mathematics."

Diese Hypothese wird unterstützt von den Ergebnissen einer Untersuchung, die LAWSON (1973) durchgeführt hatte. Er stellte fest:

> "These results indicate that a substantial portion of secondary school science subject matter is not appropriate in terms of the intellecutal level of the learner. A significant portion of the students are still operating largely on a concrete level while science content is largely abstract or formal."

Folgende Forderungen sollten zur Vermeidung einer mathematischen Überforderung der Schüler, aber auch zur möglichen Einschätzung der Rolle und Grenzen mathematischer Beschreibungsweisen im Physikunterricht beachtet werden:

1) Solange nicht sichergestellt ist, daß die Schüler <u>selbständig</u> in der Lage sind, die Transformationen Phänomen $\rightleftarrows$ WT, Phänomen $\rightleftarrows$ WT $\rightleftarrows$ GR, Phänomen $\rightleftarrows$ WT $\rightleftarrows$ GR $\rightleftarrows$ AD für einfache Zusammenhänge durchzuführen,
   - sollte auf den jeweils rechts stehenden Darstellungen kein Unterricht aufgebaut werden
   - sollte im Mathematisierungsprozeß keine Darstellung übersprungen werden.

   Zur Kontrolle dieser Inhalte in regelmäßigen Abständen, aber auch zu deren Bereitstellung scheint die Form des Lernspiels sehr geeignet.
2) Idealisierungen von Meßwerten sollten vermieden werden, auch wenn dadurch mit zusätzlichen Schwierigkeiten im Unterricht gerechnet werden muß. Nach eigenen Erfahrungen im Physikunterricht liegt hierin die einzige Möglichkeit, den idealisierenden Charakter mathematischer Betrachtungsweise dem Schüler ständig zu vergegenwärtigen.
3) Die Bedeutung mathematischer Darstellungen in der Physik muß dem Schüler stets deutlich gemacht werden. Diese triviale Forderung wurde in den von mir besuchten Physikstunden selten verwirklicht. Es würde nämlich bedeuten, daß der Lehrer den Vorhersagewert physikalischer Formeln für neue Situationen demonstriert. Der Schluß mancher Lehrer, daß man aus dem Gesetz ja die Daten der Experimente, die zur Aufstellung der Formeln geführt hätten, "voraussagen" könne, ist weder methodisch richtig noch für den Schüler besonders eindrucksvoll.

4) Der Physikunterricht sollte stärker von den wichtigen mathematischen Begriffen Gebrauch machen, die auch im Rahmen physikalischer Beschreibungen sinnvoll sind. So verlangt die Definition einer Zuordnungsvorschrift die Angabe des Definitionsbereichs. D.h., es sollte nicht nur gezeigt werden, wann ein Gesetz gilt, sondern auch, welche Phänomene von diesem Gesetz nicht mehr beschrieben werden. Der Bezug physikalischer Aussagen zum Vorgehen im Mathematikunterricht könnte dem Schüler Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen beiden Fächern deutlich machen.

B <u>Mathematikunterricht</u>:

Umgekehrt läßt sich aus den Ergebnissen der Untersuchung eine Verbesserung des Mathematikunterrichts in folgender Richtung erwarten:

1) Die Frage einer einheitlichen Notation in der Lern- und Übungsphase sollte neu überdacht werden. Die Ergebnisse der Untersuchung zeigen, daß die Verwendung einheitlicher Notation vielfältige Probleme in Anwendungsaufgaben zur Folge hat. Weiterhin leistet diese Fixierung auf die x-y-Notation dem mechanischen Lernen Vorschub und klammert wichtige Fragen aus dem Mathematikunterricht aus. Z.B. die Frage des Funktionstyps von $\varphi = \frac{1}{b} \cdot r$ (statt $y = \frac{1}{b} \cdot x$), der Zuordnung von Platzhaltern zu den Achsen, die Frage nach Werte- und Definitionsbereich in Wertetabellen und vieles mehr.
   Ein erster Schritt zur ausreichenden Berücksichtigung von Notationsproblemen wäre die Verwendung von x-y-Notation in der Einführungsphase, während in der Übungsphase <u>konsequent</u> andere Platzhalter verwendet würden.
2) Die Auswahl und Sequenzierung wichtiger mathematischer Inhalte sollte sich dort, wo ein Anwendungsbezug möglich ist, am Vorgehen in diesen Bereichen orientieren. Damit würde ein Abgeschlossenheitsniveau der Inhalte erreicht, das prinzipiell die Bearbeitung realistischer Probleme erlaubt. Bei den Darstellungstransformationen führt dies zur Berücksichtigung von Fragen des Ausschnitts, Maßstabs, Ausgleichskurven und einer Sequenzierung in Richtung WT $\rightleftarrows$ GR $\rightleftarrows$ AD. Dies impliziert, daß der Umgang mit rationalen Zahlen die Regel und nicht die

Ausnahme darstellt. Obwohl hierdurch anfänglich erhöhte Rechenprobleme für den Schüler auftreten würden, könnten durch die ständige Übung m.E. Rechenschwierigkeiten in Q schnell beseitigt werden.
In den untersuchten Klassen waren die Kenntnisse bezüglich dieser Rechenfertigkeiten so gering, daß schon von dort aus erhebliche Probleme mit den Inhalten der Lehrtexte auftraten, was von den beteiligten Lehrern nur mangelhaft gesehen wurde.

3) Die Integration von für die Schüler bedeutungsvollen Beispielen in der Einführungs- und Übungsphase scheint den Transfer zu physikalischen Problemen auch dann zu begünstigen, wenn sich diese nicht auf physikalische Situationen beziehen. Dieser Bezug zur Umwelt wird in den HRRM sehr häufig betont. Allerdings kann es m.E. dem Lehrer nicht selbst überlassen werden, entsprechende Beispiele zu suchen, so daß eine Sammlung solcher Beispiele einen wichtigen Bestandteil der Lehrpläne darstellen sollte. Besonders wichtig wäre es dabei, im Sinne der Behandlung A eine übergeordnete Fragestellung für zusammengehörige Gebiete zu finden.

4) Fixierung eines Minimalkatalogs von Mathematikkenntnissen für zentrale Gebiete jeder Klassenstufe, die regelmäßig überprüft werden. Dadurch wäre es unmöglich, mit Schülern die Bestimmung linearer Funktionen aus Graphen zu behandeln, wenn ein großer Teil der Schüler noch Schwierigkeiten mit Bruchrechnen, Gleichungen mit einer Unbekannten usw. hat. Weiterhin wäre im Physikunterricht klar, auf welchen Kenntnissen aufgebaut werden könnte.

5) Für Fächer, die im hohen Maße hierarchisch strukturiert sind (wie Mathematik, Physik) ist es besonders wichtig, relativ frühzeitig die Fähigkeit auszubilden, nach Büchern zu lernen[31].
Bei dem jetzigen Stand der Lehrbücher ist es sowohl Schülern als auch Lehrern unmöglich, selbständiges Lernen zu üben und im Falle individueller Schwierigkeiten mit Voraussetzungen eines zu behandelnden Gebietes auf diese Informationsquellen zurückzugreifen. Damit fehlt dem Schüler jede Möglichkeit, Defizite ohne die Hilfe des Lehrers selbständig zu Hause zu beheben, wodurch teilweise der Ausfall vieler Schüler im Mathematikunterricht begründet wird.

Die vorliegende Untersuchung hat zeigen können, daß entgegen der Erwartung vieler Lehrer ein Großteil der Schüler auch in 8. Klassen in der Lage sind, über längere Zeit zu Hause (im Krankheitsfalle) und im Unterricht nach den Lehrtexten selbständig zu lernen. Durch eine weniger rigide Form des Lehrtextunterrichtes wären affektive Widerstände teilweise aufzufangen.

11. Kritik und Ausblick

Bei der vorliegenden Untersuchung konnten eine Reihe von Unterschieden in den Lernergebnissen für einen anwendungsorientierten versus traditionellen Mathematikunterricht bezüglich des Transfers mathematischer Kenntnisse auf Physikaufgaben nachgewiesen werden.
Es kann aber nicht übersehen werden, daß wichtige Fragen zu diesem Komplex nur mangelhaft oder gar nicht geklärt wurden:

1) Die Reproduzierbarkeit der Ergebnisse, d.h. die Repräsentativität der gemachten Aussagen müßte in weiteren Untersuchungen festgestellt werden.

2) Nicht geklärt wurden Langzeiteffekte der Behandlungen, da entsprechende Versuche mit Behaltenstests an methodischen und organisatorischen Problemen scheiterten.

3) Eine weitere Frage betrifft die Abhängigkeit der Behandlungsunterschiede von der Dauer der Behandlung. Notations- und Kontextschwierigkeiten von Abiturienten und Studenten sind das Ergebnis eines über Jahre dauernden Mathematikunterrichts. Es bleibt zu fürchten, daß die an sich positiven Ergebnisse der Gruppe B in vorliegender Untersuchung mit der Dauer des Unterrichts zunehmend sich verschlechtern.

4) Die weitgehend organisatorisch bedingte Beschränkung der Untersuchung auf Testsituationen im Mathematikunterricht läßt nur im beschränkten Maße einen Schluß auf das Verhalten der Schüler in Problemsituationen des Physikunterrichts zu. Hierfür wäre es notwendig gewesen, auch im Physikunterricht entsprechende Kriterientests durchzuführen. Dieser Aufwand konnte nicht geleistet werden.

5) Notations- und Kontext-Probleme sind Symptome einer unzureichenden Vermittlung des formalen, vom jeweiligen Kontext unabhängigen Charakter mathematischer Strukturen. Das massive Auftreten dieser Probleme bei Schülern und Studenten zeigt, daß der bisherige Mathematikunterricht ein wesentliches Ziel verfehlt. Die Bewertung dieser Schwierigkeiten von Seiten des Physikunterrichts erscheinen m.E. dadurch möglich, daß man den zusätzlichen Lernaufwand für die Verfügung schon gelernter Mathematikkenntnisse

in physikalischen Aufgabensituationen untersucht. Entsprechend der Hypothesen über mögliche Ursachen dieses Transferproblems sind z.B. folgende abgestufte Behandlungen denkbar:

a) Drill von Transformationsalgorithmen für den Übergang von einer Notation auf die andere.
b) Erneuter Unterricht in den jeweils betrachteten mathematischen Inhalten. Es könnte festgestellt werden, ob unzureichende Kenntnisse in Mathematik eine wesentliche Ursache des Transferproblems darstellen.
c) Kombinierte Behandlung aus a) und b)
d) Behandlung c) unter Berücksichtigung anwendungsorientierter Beispiele in der Lern- und Übungsphase

Aus der Differenz der jeweiligen Lernzuwächse bezüglich eines Physiktests ließen sich Rückschlüsse auf therapeutische oder präventive Maßnahmen bezüglich des Physikunterrichts ziehen.

Abschließend sei noch auf zwei weitere Punkte eingegangen, die im Zusammenhang mit vorliegender Untersuchung zentrale Probleme des Physikunterrichts berühren.

6) Die Bedeutung mathematischer Fähigkeiten für das Physiklernen, auf die in vielen Untersuchungen hingewiesen wird (s. Abschnitt 1.4), kann bisher nur sehr undifferenziert erklärt werden. Es bleibt auch weiterhin offen, ob spezielle mathematische Kenntnisse oder mehr allgemeinere Denkstrukturen(z.B. im Sinne der Ergebnisse von SPERO, 1974) für den Physikunterricht die größere Bedeutung haben. Hier fehlen vergleichende Untersuchungen mit mathematischen Kenntnistests und Tests, die stärker logische Operationen erfassen.

7) In disem Zusammenhang wichtig ist auch die Frage nach der Bedeutung verschiedener mathematischer Darstellungen (Modelle) für das Physiklernen. Die von LAWSON(1973), KARPLUS/KARPLUS(1974), LAWRENZ(1976) u.a. festgestellten Schwierigkeiten im Physikunterricht mit der Verwendung abstrakter Modelle verlangt die Analyse des subjektiven Informationsgehalts mathematischer Darstellungen für den Aufbau physikalischer Strukturen. Untersuchungen erscheinen

deshalb notwendig, weil das Selbstverständnis dieser Darstellungen in den Physikbüchern und im Unterricht durch zunehmende affektive Widerstände der Schüler gegen den Physikunterricht in Frage gestellt wird. Eine Möglichkeit in der Bewertung der Komplexität mathematischer Darstellungen physikalischer Phänomene wird in folgender Untersuchung gesehen:

In Mathematikvorkenntnistests wird für Schüler verschiedenen Alters (Querschnittsuntersuchung) die Fähigkeit im Umgang mit Darstellungen und Darstellungstransformationen erfaßt. Anhand verschiedener physikalischer Phänomene können dann folgende Fragen im Physikunterricht geklärt werden:

a) Welche Information über den Zusammenhang physikalischer Größen eines experimentell vorgeführten Phänomens kann der Schüler dem Experiment allein, dem Experiment in Verbindung mit einer mathematischen Darstellung des Zusammenhangs und diesen Darstellungen alleine entnehmen?
b) Anhand welcher Kombination von "Experiment-Darstellung" werden Zusammenhänge am ehesten behalten?
c) Welche Kombination "Experiment-Darstellung" liefert den Schülern die meiste Information für die Prognose von Zusammenhängen bei ähnlichen Phänomenen?
d) Hängt der Informationsgehalt einer Darstellung ab von der Demonstration des Übergangs vom Phänomen zur jeweiligen Darstellung?
e) Welche Darstellung ermöglicht am ehesten die Synthese von Teilzusammenhängen zum Gesamtzusammenhang?

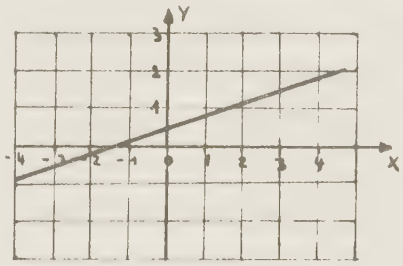
Die Klärung dieser Fragen könnte einen wichtigen Beitrag zur Entscheidung über die Verwendung "schülergerechter" mathematischer Darstellungen im Physikunterricht in Abhängigkeit vom Alter und den mathematischen Vorkenntnissen liefern.

Abschließend möchte ich Herrn Prof. Dr. K. Weltner für die Überlassung des Themas, seine freundliche Unterstützung der Arbeit und für viele anregenden Diskussionen, die für den Fortgang der Arbeit sehr wichtig waren, meinen herzlichen Dank sagen.
Herrn Dipl. Psych. G. Kanig verdanke ich viele Hinweise und kritische Diskussionen zu den methodischen Problemen der Arbeit.
Herrn B. Schuhmacher, der ausdauernd und überlegt die Druckvorlagen zur Untersuchung und zur Arbeit selbst angefertigt hat, bin ich zu großem Dank verpflichtet.
Nicht zuletzt möchte ich allen Lehrern, die durch ihre Bereitschaft diese Untersuchung ermöglicht haben, an dieser Stelle danken.
Dem Zentralen Recheninstitut der Universität Frankfurt, auf deren Rechenanlage alle numerischen Rechnungen durchgeführt wurden, möchte ich ebenfalls danken.

Anmerkungen

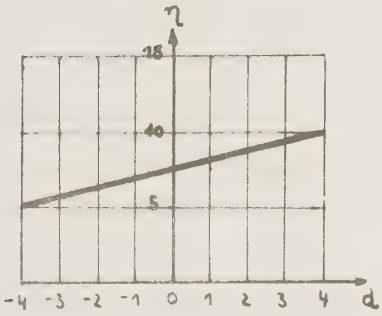
1 Die Ergebnisse zum Vorkenntnistest in 10 Klassen zeigten, daß selbst graphische Darstellungen von Wertetabellen linearer Funktionen nur zu etwa 5% von Schülern der 8. und 9. Klasse beherrscht werden, obwohl diese Inhalte zentraler Bestandteil der HRRM der 7. Klasse (s. Kap. 13.1) sind. In Gesprächen mit den beteiligten Lehrern wurde von diesen darauf hingewiesen, daß diese Inhalte aus Zeitmangel nicht oder nur am Rande behandelt worden waren.

2 Beispiele für Testaufgaben:
ZERBST /NÄGERL (1975):



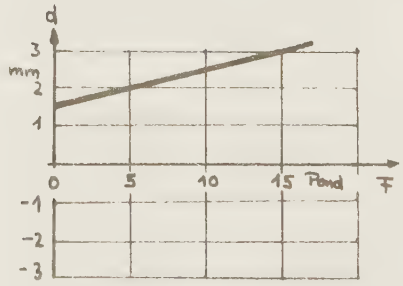
Die Gleichung dieser Geraden heißt:

.....



Ermitteln Sie die Gleichung dieser Geraden!

.....



Wie lautet die Gleichung dieser Geraden?

.....

Hinweis: Auf den Achsen sind keine reinen Zahlen abgetragen!

3 HÄUSSLER (1976):

In an experiment a certain quantity, say XXX, has been measured. This quantity XXX is dependent on another quantity, say YYY, which has also been measured. The experiment yields the following results:

measurements of the quantity XXX	measurements of the quantity YYY
1	3
2	12
5	75

How large will be the value of YYY, if XXX is equal to 4?

YYY will be _____ . I don't know

Fig. 2. Example for a test item without reference to a particular science content representing a square law (Type 3 X 2).

4 MAYER/GREENO (1972):

"Transformed (T): $p=1/3, N-p=2/3$, $N-r=o$. Find $P(X=r\ N)$. The solution requires the subject to solve simultaneous equations for N and r and then plug the values into the formula to get

$$P(X = r|N) = \binom{1}{1}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{O} = \frac{1}{3}.$$

Unanswerable (U): $N = 2$, $r = 3$, $p = \frac{1}{2}$. Find $P(X = r|N)$. The correct answer requires recognition that r, the number of successes, cannot exceed N, the number of trials; hence the subject should enter no answer or a similar response on the answer sheet. Incorrect answers usually involved writing out a formula such as

$$P(X = r|N) = \binom{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\ldots$$

Question (Q): Can r be greater than N? The correct answer also requires recognition that r, the number of successes, cannot exceed N, the number of trials; hence the subject should reply no."

5 In der Testpsychologie unterscheidet man 4 verschiedene Skalenniveaus, die im engen Zusammenhang mit der erlaubten Anwendung statistischer Prüfverfahren stehen:

1) Nominalskala: Liegt vor, wenn Zahlen oder Symbole zur Klassifizierung von Merkmalen verwendet werden (z.B. Farben)
2) Ordinal- oder Rangskala: Liegt vor, wenn Gruppe von Äquivalenzklassen (d.h. eine Nominalskala) mit Anordnungskriterien vorliegen (Bsp.: Notenskala und Relation "ist besser").
3) Intervallskala: Liegt vor, wenn eine willkürliche Maßeinheit definiert werden kann, wodurch Intervalle, Differenzen angebbar sind. Dabei muß das Verhältnis zwischen zwei beliebigen Intervallen unabhängig von der Maßeinheit und dem Nullpunkt sein (z.B. Temperaturskala).
4) Verhältnisskala: Liegt vor, wenn Skala alle Eigenschaften einer Intervallskala und zusätzlich einen absoluten Nullpunkt besitzt (z.B. Gewicht).

SIEGEL (1976, S.28) schreibt hierzu:

"Die meisten Verhaltenswissenschaftler bemühen sich, Daten auf dem Intervallskalenniveau zu erhalten, und in sehr seltenen Fällen gelingt ihnen das auch."

Damit bewegen sich weitaus die meisten Untersuchungen auf einem niedrigeren Skalenniveau, für die weder Mittelwerte noch Varianzen berechnet werden können, sodaß verteilungsabhängige Prüfverfahren wie F- und t-Test, Korrelationen, Regressionen nicht angewendet werden dürfen. Dies widerspricht häufig den Praktiken in den Veröffentlichungen, sodaß eine Skepsis gegenüber vielen Ergebnissen und Interpretationen angebracht ist. (Wegen des Zusammenhangs von Skalenniveau und angemessener Statistik siehe SIEGEL (1976, S. 30)).

Im Gegensatz zur allgemeinen Transferforschung geht es bei Schulexperimenten in der Regel um die Verbesserung von Unterrichtsverfahren. Deshalb sollte der Einfluß des neuen Verfahrens stets in Bezug auf Lerneffekte mit üblichen Unterrichtsverfahren getestet werden.

7 Z.B.sollten graphische Darstellungen linearer Funktionen nicht über den verkürzten Algorithmus "Berechnung zweier geordneter Paare und Darstellung als Punkte, Zeichnen der Geraden durch diese Punkte" vermittelt werden, da für inverse Funktionen dieses Verfahren versagt (s. z.B. LAMBACHER/SCHWEIZER (1970,S.138)). Ähnlich verhält es sich bei der Bestimmung von Geradengleichungen mit Hilfe des Achsenabschnitts.

8 Hierunter wird verstanden, daß nachfolgendes Lernen sich negativ auf das Behalten des schon Gelernten auswirkt, was besonders bei ähnlichen Lerninhalten auftritt (s. AUSUBEL, 1974, S.126).

9 AUSUBEL merkt allerdings an, "daß, obwohl mechanisches Lernen unter den meisten Bedingungen schwieriger ist als sinnvolles Lernen, es für Individuen, denen der notwendige Ideenhintergrund für eine bestimmte Lernaufgabe fehlt, tatsächlich leichter sein kann." (S.125)

10 In den methodischen Hinweisen zur 7. und 8. Klasse wird darauf hingewiesen (III-B-4):

"Die Methode der Naturwissenschaft, aus der Fülle von ausgewerteten Experimenten Naturgesetze zu erschließen, kann nun voll entfaltet werden"

und weiter:

"Der Begriff der physikalischen Größe sowie der Maßeinheit ist nun einzuführen und in Größengleichungen exakt zu verwenden."

11 REIFENKUGEL (1972, S.6) stellt ebenfalls fest:

"Vergeblich sucht man nach Elementen aus der sog. "Neuen Mathematik". (Gemeint ist Lehrbuch von ROTH/TREU, Einführung in die Physik, 1967)."

12 Im Berliner Rahmenplan erfolgt eine Behandlung der Relationen in der 8. Klasse, der Funktionen in der 9. Klasse.

13 Zum Konzept der integrierenden Leitprogramme siehe WELTNER et al. (1973a, 1973b)

14 Bei 16 möglichen Transformationen (4 x 4) wären 16 isomorphe M/P-Aufgabenpaare notwendig. Die Einbeziehung von Parallelaufgaben ergäbe 32 Aufgabenpaare, was bei einem mittleren Zeitbedarf von 7 min pro Aufgabe eine Testzeit von 10 Schulstunden erfordern würde.

15 Normalerweise werden in diesem Zeitraum höchstens zwei Klassenarbeiten à 1 Stunde geschrieben.

16 Ungeeignet auch deshalb, weil die Antworten zu diesem Aufgabentyp keine Hinweise auf den genommenen Lösungsweg zulassen.

16a Der Versuch, diese Aufgaben mit Schülern von zwei 12. Klassen, die nach den herkömmlichen Lehrplänen unterrichtet wurden, auf Verständlichkeit und Schwierigkeit zu überprüfen, scheiterte, da die meisten P-Aufgaben zu weniger als 3o% bearbeitet wurden. Diskussionen über die Aufgaben ergaben, daß viele Schüler affektive Widerstände gegen P-Aufgaben entwickelt hatten, die sie von deren Bearbeitung abhielten.

17 Da auf diese Operationen häufig Bezug genommen wird, kann sie herausgeklappt werden.

18 Der Begriff "Lernspiel" soll darauf hinweisen, daß dieses Material neben der Funktion der Erfassung von Kenntnissen langfristig als sinnvolles Lernmaterial zum Erkennen relevanter Merkmale physikalischer Forschungsstrategien gedacht ist. Die spielerische Komponente liegt darin, alle angegebenen Möglichkeiten (Verzweigungen) durchzuspielen und anhand der Rückmeldung allmählich die Strategie zu erfassen.

18a Erhebliche Schwierigkeiten bei der Gewinnung der Lehrer für diesen Langzeitversuch hatten folgende Ursachen:

1) Wegen der Parallelität der Gruppen mußten jeweils zwei Mathematiklehrer von Parallelklassen einer Schule dem Versuch zustimmen. Häufig war nur ein Lehrer hierzu bereit.
2) In manchen Schulen waren die Lehrer zwar bereit für einen Versuch, aber der Direktor verweigerte die Zustimmung.

Hauptargumente gegen die Verwendung der Unterrichtsmaterialien waren:

1) Inhalte der Lehrtexte bezogen sich nicht auf die geplanten Unterrichtsinhalte.
2) Ungewohnte Lehrmethode wurde als Überforderung angesehen, die Unruhe in die Klasse bringt
3) Negative Erfahrungen mit Lehrprogrammen, mit denen die Lehrtextmethode in Verbindung gebracht wurde.

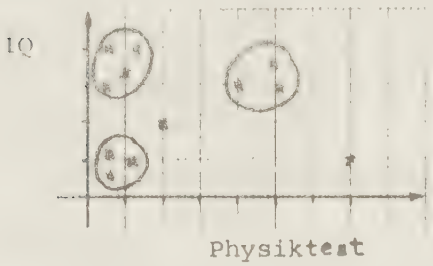
19 z.B. wurde die konsequente Durchführung der Lehrtextmethode von einem Lehrer begründet mit "Wir können doch Herrn Hoffmann nicht seine Untersuchung kaputtmachen.".

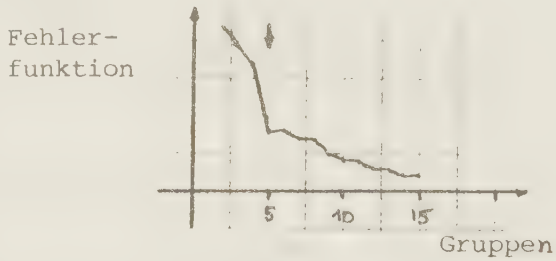
20 Beispiel: Bei der Bestimmung von a_o anhand von Graphen wurde erläutert, daß bei Geraden, die die y-Achse im negativen Teil schneiden, die allgemeine Funktionsgleichung $y = a_1x - a_o$ lautet. Das Einsetzen des Wertes von a_o bewirkt dann ein falsches Vorzeichen für den Achsenabschnitt. Dieser Fehler ließ sich nur schwer rückgängig machen.

21 Interessant anzumerken ist, daß die Schüler der meisten Eltern, die sich gegen diese Untersuchung aussprachen, den kontrollierten Nachhilfestunden in beiden Klassen fernblieben. Begründung: "Ich habe Mathematik schon längst aufgegeben" oder "Mich hält keiner länger als notwendig in der Schule".

22 Alle Computerberechnungen wurden auf dem Rechner des Hochschulrechenzentrums an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität, Frankfurt/Main, durchgeführt.

Die Clusteranalyse ist ein Verfahren zur Identifizierung von Gruppierungen von Ereignissen in einem n-dimensionalen Merkmalsraum (z.B. Gruppierung von Personen bezüglich n Merkmalen). Das Verfahren beginnt mit N Einzelereignissen (N Gruppen). In jedem folgenden Schritt wird durch Zusammenfassung von zwei Gruppen die Zahl der Gruppen um eins reduziert. Als Kriterium für die Zusammenfassung wird eine Fehlerfunktion definiert, deren Wert sich durch die Gruppenbildung möglichst wenig ändern soll. Sehr häufig hängt diese vom Quadrat des Abstandes zweier Punkte (Ereignisse) ab (Error sum of squares objective function nach WARD (1963)). Wegen möglicher anderer Kriterien siehe z.B. WISHART(1969). Die sinnvolle Gruppenbildung wird als abgeschlossen betrachtet, wenn sich der Wert der Fehlerfunktion sprunghaft vergrößert.
Beispiel: 16 Personen bearbeiten einen IQ-Test und einen Physiktest. Die Ergebnisse (Punktwerte) der 16 Personen können als Punkte in einem zweidimensionalen Raum dargestellt werden:





Die Clusteranalyse faßt nun sukzessiv die 16 Gruppen zu 15,14,13,... Gruppen zusammen. Die Fehlerfunktion steigt langsam an, bis 5 Gruppen übrigbleiben. Eine weitere Zusammenfassung führt zu einem sprunghaften Ansteigen der Kurve, was auf die Bildung von inhomogenen Gruppen hindeutet.

24 Um eine Vorstellung zu vermitteln, welchen Defekten die einzelnen Stufen entsprechen, folgendes Beispiel:

Stufe 0: Bei WT → AD wurde Maßstab falsch gemacht oder weniger als 25% der Punkte richtig eingezeichnet. Bei GR → AD wurde falscher Funktionstyp angegeben.

Stufe 1: Bei WT → AD wurden weniger als 60% der Punkte richtig eingezeichnet. Bei GR → AD wurde Funktionstyp richtig bestimmt.

Stufe 2: Bei WT → AD wurden weniger als 80% der Punkte richtig eingezeichnet. Bei GR → AD wurde Steigung a_1 richtig berechnet.

Stufe 3: Bei WT → AD wurden mehr als 80% aller Punkte richtig eingezeichnet. Bei GR → AD wurde a_1 richtig berechnet und Funktionsgleichung angegeben.

25 Die χ^2-Analyse ist ein Verfahren zur Prüfung von Unterschieden zwischen Variablen auf Nominalskalenniveau.
Beispiel: Für Aufgabe 10bp ergibt sich folgende Kreuztabelle, wenn man die Variablen Behandlung (A oder B) und Lösungsniveau (Stufe 0 oder 3) betrachtet:

10bp

	0	3	Gesamt
A	23 (32)	38 (29)	61
B	31 (32)	30 (29)	61
Gesamt	54	68	102

Die Zufallsvariable Chi-Quadrat dient zur Prüfung der Unterschiede zwischen der Anzahl der beobachteten und erwarteten Fälle in den Zellen. Erwartet wird in der Regel kein Zusammenhang zwischen den Variablen, d.h. die Häufigkeitsverteilung über die Zellen ist rein zufällig. Die erwartete Häufigkeit f_{AO} für die Zelle A,O berechnet sich nach $f_{AO} = \frac{f_A}{N} \cdot \frac{f_O}{N} \cdot N = \frac{f_A \cdot f_O}{N} = \frac{61 \cdot 54}{102} = 32$
(Die kleinen Zahlen in der Tabelle geben diese aufgrund der gegebenen Randsumme berechneten erwarteten Häufigkeiten wieder). Die Zufallsvariable Chi-Quadrat ermöglicht eine Signifikanzprüfung der Abweichungen zwischen beobachteten und erwarteten Zellbesetzungen. Wegen genauerer Beschreibung der χ^2-Analyse siehe SIEGEL (1976, S. 101-108).

26 Die Zusatzaufgaben waren so konstruiert, daß sie auch unabhängig von den Hauptaufgaben gelöst werden konnten. Allerdings zeigte sich, daß bei Nichtbearbeitung der Hauptaufgaben häufig auch die Zusatzaufgabe ausgelassen wurde.

27 Die Aufgabe 5ap, die als isomorphe Aufgabe zu 5am konstruiert war, mußte aufgrund der Ergebnisse als Einzelaufgabe behandelt werden. Während nämlich bei der Aufgabe 5am von den Schülern der Kurvenverlauf beschrieben wurde, antworteten viele Schüler auf die Fragestellung von Aufgabe 5ap mit einer Interpretation.

28 Gruppe IV konnte nicht berücksichtigt werden, da diese die Aufgabengruppen 11 und 12 (Test II) nicht mitgeschrieben hatte.

29 Die Skalogrammanalyse nach GUTTMAN (s. NIE et al. (1975, S.528); ORTH (1974) S. 42 - 46) ordnet die Aufgaben nach aufsteigendem Schwierigkeitsgrad und untersucht nun, inwieweit einem bestimmten Punktwert die Lösung bzw. Nichtlösung bestimmter Aufgaben entsprechen.
Beispiel: Gegeben seien drei Aufgaben A1, A2,A3. In einer Population N = 70 möge A1 die schwierigste, A2 die leichteste Aufgabe sein. Das GUTTMANSKALA-Programm bestimmt nun, welche Antwortvektoren den Summenpunkten 3 (alle Aufgaben richtig), 2,1,0 (alle Aufgaben falsch) zuzuordnen sind. Für dieses Beispiel möge sich folgendes Bild ergeben:

Summenpunktwert	A1		A3		A2		Häufigkeit
	r	f	r	f	r	f	
3	13	-	13	-	13	-	13
2	2	22	23	1	24	-	24
1	1	17	2	16	14	4	18
0	-	15	-	15	-	15	15
Fehler	3		2	1		4	
							N = 70

Erläuterung:

r: Aufgabe richtig
f: Aufgabe falsch
▭ Antwortvektoren, die nicht mit der angenommenen Ordnungsstruktur übereinstimmen.

Überprüft man die Aussage "Wer zwei Aufgaben richtig hat, hat Aufgabe A1 falsch und A3,A2 richtig", so stellt man in 3 Fällen Abweichungen von dieser Ordnung fest. Zwei dieser Personen haben A1 richtig und eine Person A3 falsch gemacht. Für Punktwert 1 sind 7 Fehler festzustellen; d.h. in 10 Fällen von möglichen $3 \cdot 70 = 210$ Fällen sind Abweichungen von der angenommenen Ordnungsstruktur vorhanden. Man sagt, der Reproduzibilitätskoeffizient der GUTTMANSKALA ist $R = 1 - \frac{10}{210} = 0.95$. Für $R \sim 0.9$ wird das Vorhandensein einer GUTTMANSKALA als hinreichend bestätigt angenommen.

30 Aufgrund einer logischen Analyse der Schwierigkeiten in den Transformationen wurde folgende Rangreihe der Transformationen erwartet:
WT → AD, GR → AD, AD → GR, AD → WT, WT → GR.
Der theoretisch erwartete Rang einer Transformation berechnet sich dann aus der Zahl der Aufgabenteile zu diesem Typ. So ergibt sich für die 4 Aufgabenteile zu WT → AD ein Rang von $(1+2+3+4)/4 = 2,5$.

31 Auf den Zusammenhang zwischen Lesefähigkeit und Mathematik wird in der Literatur häufig hingewiesen (z.B. EAGLE (1948); EARP (1971)).
In der Arbeit von EARP (1971, S. 132) wird zusammenfassend über Untersuchungen von Texten und Lesefähigkeit festgestellt:

> "If educators are to be successful in teaching arithmetic, either the reading level of the material must be lowered or the reading level of the children must be improved, or both." Und weiter: "Any teacher of mathematics must be a reading teacher."

Literatur

ABELES, S.: The utilisation of certain mathematics skills in the solution of selected problems in physics. Diss.Abstr., 1966, 27'8 S. 2435-A

AIKEN, L.R.:Ability and creativity in mathematics.
In: J. of Rec. of Educ. Research. 1973, 43,4, S. 405 - 432

ANGER,R./ R. BERGMANN/ M. VOIGT: Verständiges Lesen VL 7-9. 1965, Weinheim

AUSUBEL,D.P.: The transition from concrete to abstract cognitive functioning.
In: J. of Research in Science Teaching, 1964, 2, S. 261 - 266

AUSUBEL,D.P.: Psychologie des Unterrichts Band 1 und 2, 1974, Weinheim

BARTH, N./ K. HOFFMANN/ K.H. KITSCHKE/ R. SCHMIDT/ K. WELTNER/ H. WIESNER: Wurde eine Chance vertan? Anmerkungen zu den Hessischen Rahmenrichtlinien Physik, Sekundarstufe I.
In: Deutsche Schule, 1974, 12, S. 826 - 837

BAUER, H.: Denkschrift zum Mathematikunterricht an Gymnasien.
Herausgegeben von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung E.V., 1976, Freiburg

BELL, M.: What does "everyman" really need from school mathematics?
In: The Mathematics Teacher, 1974, 67, 3, S. 196 - 202

BERGMANN, F./W. SCHELPER: Einführung in die Physik, Sekundarstufe I.
1974, Frankfurt/Main

BOECK, C.H.: Science and mathematics: Siblings, not Strangers establishing the relationship.
In: School Science and Mathematics, 1972, 72, S. 35 - 40

BOLTE, J.R.: Background factors and success in colleg physics.
In: J. of Research in Science Teaching, 1966, 4, S. 74 - 78

BOTTENBERG, E.H./ A. MAIWALD: Lernbedingungen mathematischer Leistungen.

In: Studien zur Begabungsforschung Bd. IV (Hrsg. LÜCKERT) 1972, München

BRANDWEIN, P.F./ F.G. WATSON/ P.E. BLACKWOOD: Teaching high school science. A book of methods. 1958, New York

BRUNER, J.S.: The course of cognitive growth. 1964.

In: WATSON, P.C. and JOHNSON-LAIRD (eds) Thinking and Reasoning. 1970, Harmondsworth

CAIN, R.W./ E.C. LEE: An analysis of the relationship between science and mathematics at secondary school level.

In: School Science and Mathematics, 1963, 63, S. 705 - 713

CARPENTER, R.: How much mathematics for physics?

In: School Science and Mathematics, 1966, S. 645 - 649

COLLAGAN, R.: The construction and evaluation of a programmed course in mathematics necessary for success in college physical sciences.

In: J. of Research in Science Teaching, 1969, 9, S. 358 - 365

DAHNCKE,H./ R. GENSELAZKY: Mathematisches Grundwissen für zukünftige Chemie- und Physiklehrer der Sekundarstufe I.

In: DAHNKE, H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie. 1975, Hannover, S. 293 - 302

DANIELS, J.C.: Figure Reasoning Test. 1967, Dorchester

DAVIDSON, W.W.: A comparison of students achievement in high school mathematics and science courses based on the instructional approach used in eight grade mathematics. Diss.Abstr. 1968, 29'8, S. 2514A

DENNY, R.T.: An analysis of the relationship between certain mathematics skills and chemestry achievement. Diss.Abstr. 1970, 31'12, S. 6429-A

DORN, F./ BADER: Physik Mittelstufe.
1974, Hannover

DÖRNER, D.: Grundmuster begrifflicher Strukturen und eine Strategie der Unterrichtsforschung.
In: FREY/LANG (Hrsg.): Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht.
1973, S. 79 - 93

EAGLE, E.: The relationship of certain reading abilities to success in mathematics.
In: The Math. Teacher, 1948, 41, S. 175 - 179

EARP, N.W.: Problems in reading in mathematics.
In: School Science and Mathematics, 1971, 71, S. 129 - 133

ECKEL, K.: Die Bedeutung des Klasseneffekts für die schulpädagogische Forschung.
In: Programmiertes Lernen und programmierter Unterricht.
1969, 6, S. 97 - 113

ELLIS, H.C.: The transfer of learning.
1965, New York

ENGEL, A.: Systematic use of applications in mathematics.
In: Educ. Studies in Math., 1968, 1, S. 202 - 221

FLAMMER, A.: Transfer und Korrelation.
1970, Weinheim

FLEISCHMANN, R.: Die Struktur der physikalischen Begriffsbildung.
In: Z. Phys., 129, S. 377 - 400

FLETCHER, R.K.: The effects of grade levels and other factors on the achievement in project physics among high school physics students.
Diss. Abstr. 1972, 33'8, S. 4442-A

FREUDENTHAL, H.: Why to teach mathematics so as to be useful.
In: Educ. Studies in Math., 1968, 1, S. 1 - 8

FREY, K./ M. LANG: Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht.
1973, Stuttgart

FULLER, A.W. et al.: Physics and Mathematics.
In: LEWIS, J.L.: Teaching School Physics.
1972, S. 151 - 160, London

GEORGE, S.: Basic mathematics background of students in the one year non-calculus phsyics course in the USA.
In: Phys. Educ., 1974, 9, 5, S. 350 - 352

GIESE, R.H.: Mathematische Vorkenntnisse und Schulnoten der Teilnehmer an physikalischen Anfängervorlesungen.
In: Physik und Didaktik, 1974, 2, S. 129 - 136

GRIFFIN, F.L.: Mathematics: A tool or a system of thought?
In: The Mathematics Teacher, 1937, 30, S.223 - 228

GROEBEN, N./ H. WESTMEYER: Kriterien psychologischer Forschung.
1975, München

HÄUSSLER, P.: Investigations of mathematical reasoning in science problems.
Vortrag, gehalten auf dem IPN-Symposium 7, 1975

HALL, A.J.: Relations between science and mathematics in the secondary school.
In: Nat'l Assu. Sec. Sch. Prins. Bull. Jan. 1953, S. 93

HEISE, H./ J. MITTNER: Über die elementarmathematischen Kenntnisse von Medizinstudenten der Anfangssemester und die Konsequenzen.
In: MNU, 1975, 7, S. 436

HENKEL, R.E./ MORRISON, D.E.: The significance test controversy.
1970, London

HERTZ, F.: Prinzipien der Mechanik.
1894, Leipzig
Neuauflage 1963, Darmstadt

HILGARD, E.R./ R.P. IRVINE/ J.E. WHIPPLE: Rote memorisation understanding, and transfer.
In: J. of Exp. Psy., 1953, 46, S. 288 - 292

HOFFMANN, K.W./ JUNG, W./ WIESNER, H. : Welche Information liefern Assoziationen von Schülern für den Physikunterricht?
In: DAHNKE, H.(Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie, 1975, S. 279 - 288, Hannover

JERMAN, M.: Problem length as a structural variable in verbal arithmetic problems.
In: Educ. Studies in Math., 1973, 5, 2, S. 109 - 123

JERMAN, M./ S. MIRMAN: Linguistic and computational variables in problem solving in elementary mathematics.
In: Educ. Studies in Math., 1974, 5, S. 355 - 362

JUNG, W.: Didaktik der Physik.
1970, Frankfurt/Main-Berlin-München

JUNG, W.: Anmerkungen zu den Konstruktionsprinzipien einiger moderner Physik-Curricula.
In: Bildung und Erziehung, 1971, 5, S. 463 - 474

JUNG, W./ H. SCHWEDES: Lernschwierigkeiten im Physikunterricht.
In: Zur Didaktik der Physik und Chemie, 1975, S. 82 - 90

JUNG, W.: Wachsende Kluft zwischen Schulmathematik und Schulphysik?
Vortrag, gehalten auf der 10. Tagung Didaktik der Mathematik, 1976

KARPLUS, R./ E.F. KARPLUS: Ratio: A longitudinal study.
In: FREY, K./ M. LANG (Hrsg.): Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht.
1973, Stuttgart, S. 305 - 319

KATONA, G.: Organizing and memorizing.
1940, New York

KILPATRICK, J.: Problem solving in mathematics.
In: J. of Educ. Research, 1969, 39, 4, S. 523 - 534

KLAUER, K.J.: Lernen und Intelligenz.
1969, Weinheim

KLAUER, K.J.: Das Experiment in der pädagogischen Forschung.
1973, Düsseldorf

KLAUER, K.J.: Methodik der Lehrzieldefinition und Lehrstoffanalyse.
1974, Düsseldorf

KLEIN, M.: Why Jonny can't add.
1973, New York

KOLB, J.R.: Effects of relating mathematics to science instruction on the aquisition of quantitative science behavior.
In: J. of Res. in Science Teaching, 1967-1968, 5, S. 174 - 182

KRÖPELIN, E.A.: Die Rolle des V-Faktors beim Lösen von Textaufgaben.
In: Neue Sammlung, 1966, 6,2, S. 226

KRUGLAK, H.: An experimental study of Multiple-Choice and openend tests in physics.
In: J. of Res. in Science Teaching, 1967, 4, S. 247 - 249

KUHN, W./ L. FONTIUS/ H. LOCHHAAS: Physik, Band 1
1967, Braunschweig

KULLMAN, D.: Correlation of mathematics and science teaching.
In: Science School and Mathematics, 1966, S. 645 - 646

LAMBACHER/SCHWEIZER: Algebra 1.
1970, Stuttgart

LAWSON, A.E.: Relationship between concrete and formal operational science subjekt matter and the intellectual level of the learner.
Diss.Abstr., 1973, 34'6, S. 3179-A

LAWRENZ, F: Student perception of the classroom learning environment in biology, chemestry and physics courses.
In: J. of. Res. in Science teaching, 1975, 13, 4, S. 315 - 323

LIENERT, G.A.: Testaufbau und Testanalyse.
1961, Weinheim

LYNESS, R.C.: Applied mathematics in english schools.
In: Educ. Studies in Math., 1968, 1, S. 98 - 104

MACH, E.: Prinzipien der Wärmelehre. 1919.

MARCUS, A.: Physics for modern time.
1952, New York

MARS, P.A.: High School geometry achievement as related to reading achievement, arithmetics achievement and IQ in the public schools of Lincoln, Nebraska.
Diss. Abstr., 1970, 31'4, S. 1691-A

MAYER/GREENO: Structural differences between learning outcomes produced by different instructional methods.

In: J. of Educ. Psych., 1972, 63, S. 165 - 173

MITTENECKER, E.: Planung und statistische Auswertung von Experimenten.
1970, Wien

NÄGERL, H./ BECKER, H./ SCHULTE, H.D./ ZERBST, J.: Über den Einfluß audiovisueller Mathematikprogramme auf den Lernerfolg in einem phyisikalischen Anfängerpraktikum.

In: DAHNKE, H.(Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie, 1975, S. 150 - 157, Hannover

NEDELSKY, L.: Formation of objectives of teaching in the physical sciences.

In: American J. of Physics, 1949, 11, S. 345

NIE, N./ C.H. HULL/ J.G. JENKINS/ STEINBRENNER/ D.H. BENT: Statistical package for the social sciences (SPSS)
1975, New York

OERLEIN, K.: Mathematical difficulties in college physics.

In: The Math. Teacher, 1937, 37, S. 125 - 127

OERTER, R.: Steuerungskomponenten bei kognitiven Prozessen im Bereich schulischen Lernens.

In: FREY, K./ M. LANG: Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht.
1973, S. 56 - 78, Stuttgart

OPPENHEIMER, J.R.: Wissenschaft und allgemeines Denken.
1956, Rowohlts deutsche enzyklopädie, Bd. 6

OREAR, J.: Fundamental physics.
1961, New York

ORTH, B.: Einführung in die Theorie des Messens.
1974, Stuttgart

OSBORNE, A.R.: Mathematical limitations on scienctific creativity. A historical perspective.

In: School Science and Math, 1969, S. 599 - 604

PARQUE, R.: An experimental study to investigate the mathematical needs of students in a traditional physics course.

In: School Science and Math., 1966

POLLAK, H.O.: On some of the problems of teaching applications of Mathematics.
In: Educ. Studies in Mathematics. 1968, 1, S. 24 - 30

RAHMENRICHTLINIEN Sekundarstufe I, Mathematik
Der Hessische Kultusminister

RAHMENRICHTLINIEN Sekundarstufe I, Physik
Der Hessische Kultusminister

RANG, O. et al.: Analysen des mathematischen Gehalts von Physikbüchern.
In: Zentralblatt Didaktik der Mathematik, 1972, 1, S. 1 - 17 und
2, S. 41 - 52

RANG, O.: Zur negativen Transferwirkung von Schultradition und Muttersprache.
In: Der Physikunterricht, 9, 1975, Heft 2

RANG, O./ W. GRÖNE/ B. HOFFMANN: Zum Transfer im Physikunterricht.
In: Der Physikunterricht, 1975, 2, S. 5 - 64

REDFIELD, D.D./ R.R. ATWOOD: An investigation of an experimental model in the physical sciences for the Junior High Student.
In: J. of Res. in Science Teaching, 1966, 4, S. 217 - 226

REICHENBACHER, W.: Bericht über die Erprobung der Rahmenrichtlinien Mathematik in Klasse 8b im Schuljahr 1973/74.
Unveröffentlichte Sammlung von Erprobungsberichten zu den HRR, 1976

REPORT of the Joint Royal Society: The Mathematical needs of A level physics students.
In: Physics Educ., 1973, 8, 4, S. 241 - 244

REPORT of the SMSG Panel on Research Newsletter No. 39 1972 (August)

RIBAN, D.M.: On the ability to infer deficiency in mathematics from performance in physics using hierarchies.
In: J. of Res. in Science Teaching, 1971, 8, 1, S. 67 - 82

RICHTLINIEN für Schulen in Niedersachsen, Realschulen 1969, Hannover

RICHTLINIEN und Lehrpläne der freien und Hansestadt Hamburg, Band III, 1973

RIEDEL, K.: Lehrhilfen zum entdeckenden Unterricht 1973, Hannover

ROGERS, E.M.: Physics for the inquiring mind. 1960, New Jersey

ROLLETT, B. : Das Design in der empirischen Unterrichtsforschung. In: ROTH, L. (Hrsg.): Beiträge zur empirischen Unterrichtsforschung. 1974, Hannover

SCANDURA, J.M.: Precision in research on mathematic learning. The emerging field of psychomathematic. In: J. of Res. in Science Teaching, 1966, 4, S. 253 - 274

SCHMID, B.A./ W. ZÖLLER: Lernfragen. 1973, Heidelberg

SCHRODER, H.M./ M.J. DRIVER/ S. STREUFERT: Human information processing. 1967, New York

SCHWALBE, K.: Schwedische Hochschulen fordern mehr Rechenfertigkeiten. In: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, 1972, 7

SEAREL, B.W. et al.: Structural variables affecting CAI performance on arithmetic word problems of disadvantaged and deaf students. In: Educ. Studies in Math., 1974, 5, S. 371 - 384

SEILER, B.: Kognitive Strukturen und kognitive Persönlichkeitstheorien. In: SEILER, B. (Hrsg.): Kognitive Strukturiertheit, 1973, S. 9 - 27

SIEGEL, S.: Nichtparametrische statistische Methoden. Deutsche Übersetzung von SCHÜLE, W. 1976, Frankfurt/Main

SMITH, W.D.: An investigation of the ability of students in the secondary school mathematics curriculum improvement study (SSMCIS) to generalize their knowledge of function concepts to other stimulus settings. Diss. Abstr. 1972, 33'11, S. 6078-A

SPERO, S.W. : Selected structure of intellect factors. Diss. Abstr. 1974, 35'3, S. 1555-A

SPOHN, G.: Can mathematics be saved?
In: Bulletin of the inst. of math. and its applications
1971, 7, 3

SPRECKELSEN, K.: Science - A Process Approach
In: Beiträge zum mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht. Bericht eines Arbeitskreises am Institut für Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.
1968, Heft 15

SUPPES, P./ J.L. ZINNES: Basic measurement theory
In: LUCE, R. et al. (Hrsg.): Handbook of mathematical psychology.
1963, Vol. I, New York

SWARTZ, C.E.: The great american new math swindle.
In: The Phys. Teach., 1973, 11,3, S. 134

SZEKELY, L.: Productive process in learning and thinking.
In: Acta Psychologica.
1950, 7, S. 388 - 407

TORGERSON, W.S.: Theory and methods of scaling.
1967, New York

THORNDIKE, E.L.: The effect of changed data upon reasoning.
In: J. of Exp. Psychol., 1922, 5, S. 33 - 38

THORNDIKE, E.L.: Mental disciplin in high school studies.
In: J. of Exp. Psychol., 1924, 15, S. 1-22,83-96

VAN HIELE, R.: System separation and transfer.
In: Educ. Studies in Mathematics,
1974, 5, S. 413 - 417

VELDMAN, R.: Fortran programming for behavioral science.
1972, New York

WALZ, A.: Physik. 1974, Hannover

WARD, J.H.: Hierarchical grouping to optimize an objective function.
In: J. Amer. Stat. Ass, 1963, 58, S. 236

WELTNER, K.: Leitprogramme als Weiterentwicklung der Lehrprogramme.
In: Der Physikunterricht, 1973a, Heft 1

WELTNER, K. et al.: Leitprogramm: Mathematik für Studenten mit Physik als Nebenfach.
In: SCHMIDT, H. (Hrsg.): Zur Didaktik der Physik und Chemie.
1973b, S. 68 - 75, Hannover

WELTNER, K.: Lernen im Zusammenhang.
In: Grundlagenstudien zur Kybernetik und Geisteswissenschaften,
1974, 4

WELTNER, K. et al.: Mathematik für Physiker.
1975, Wiesbaden

WELTNER, K.: Förderung des autonomen Lernens.
In: Unterrichtswissenschaften,
1976, 2, S. 114 - 127

WEYL, H.: Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften.
1966 Oldenburg-München-Wien

WISHART, D.: Mode analysis: A generalization of nearest neighbour which reduces chaining effects.

ZERBST, J./ H. NÄGERL: Über die Schwierigkeit der Studienanfänger im Umgang mit linearen Funktionen.
In: KUHN, W./ SCHARMANN (Hrsg.): Vorträge der Tagung des Fachausschusses Didaktik der Physik,
1975, Gießen

Lebenslauf

1. 7.	1943	geb. in Leipzig als Sohn des Dipl.Phys. Dr. Konrad Hoffmann und seiner Frau Elisabeth, geb. Pilz
	1945	Übersiedlung nach Weilburg/Lahn
	1950	Besuch der Volksschule Weilburg/Lahn
	1951	Umzug nach Frankfurt-Höchst. Besuch der Volksschule Frankfurt-Unterliederbach
	1954	Besuch des Leibniz-Gymnasiums Frankfurt-Höchst
	1962	Besuch der Privatanstalt Dr. Richter, Kelkheim/Ts
März	1963	Abitur und Beginn des Physikstudiums an der Johann Wolfgang Goethe-Universität, Frankfurt
Nov.	1965	Vordiplom Physik
Dez.	1967	Eheschließung mit der Kindergärtnerin Monika Kugelmann
Dez.	1968	Diplomhauptprüfung Physik
bis	1970	wiss. Hilfskraft und wiss. Mitarbeiter von Prof. Dr. D. Wolf
	1971	Mitarbeiter des Deutschen Entwicklungsdienst
seit	1972	akad. Tutor und Mitarbeiter am Inst. Didaktik der Physik, Frankfurt

Meine akademischen Lehrer waren:

Behrends, Bilz, Bundke, Dänzer, Kummer, Martienssen, Matthaei, Morowka, Moufang, Münster, Müser, Österreich, Reichert, Royl, Sauer, Süßmann, Weltner, Wieland, Wolf

Anhänge

1.1 Mathematischer Vorkenntnistest (V1 - V4)
1.2 Lese-Lern-Test (LLT)

1.3 Einstellungsfragebogen

2.1 Lehrtext A
2.2 Lehrtext B
2.3 Leitprogramm A
2.4 Leitprogramm B
2.5 Antwortbogen A
2.6 Antwortbogen B

3.1 Test I
3.2 Test II
3.3 Lernspiel

4.1 Operationsanalyse
4.2 Operationen
4.3 Auswertanweisung
4.4 Code Aufgabenmerkmale
4.5 Methodenprobleme

1.1 Mathematischer Vorkenntnistest (V1 - V4)

1.2 Lese-Lern-Test (LLT)

1.3 Einstellungsfragebogen

NAME: KLASSE: DATUM:

1. Rechenübungen:

a) $-5 - 0{,}2 =$

b) $-5 + 2 =$

c) $-6-(-8) =$

d) $(-10)\cdot 0 =$

e) $(-6)\cdot 3 =$

f) $(-6)\cdot(-2) =$

g) $3\cdot 0{,}07 =$

h) $\frac{3}{0{,}2} =$

i) $\frac{0{,}4}{-0{,}2} =$

j) $\frac{-0{,}6}{-0{,}2} =$

k) $\frac{-3 + 4}{2 - 1} =$

l) $\frac{-3 + 4}{-3 - 1} =$

2. Berechnung einer unbekannten Zahl

a) $x + 3{,}5 = 0{,}7$ Wie groß ist x? $x =$ .....

b) $y = 0{,}2\cdot x - 3$ Wie groß ist y, wenn x = 10 ist ? $y =$ .....

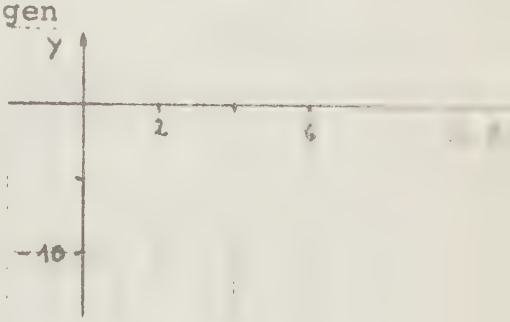
c) $y = a_1\cdot x + a_0$ Wie groß ist a_0, wenn y=2, x=2 und $a_1=-2$ ist? $a_0 =$ .....

3. Bestimmung von Zeichnungen und Gleichungen

a) Zeichnen Sie folgende Funktion

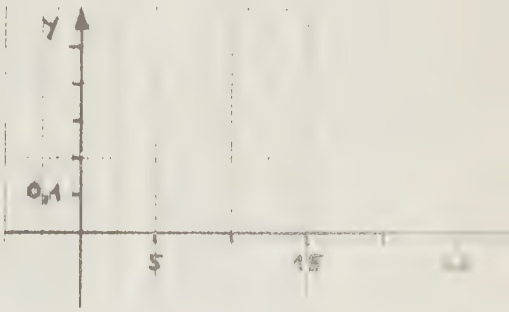
$x \rightarrow \frac{1}{3}\cdot x - 8$

für x-Werte von 0 bis 9 und $x \in \mathbb{Q}$.

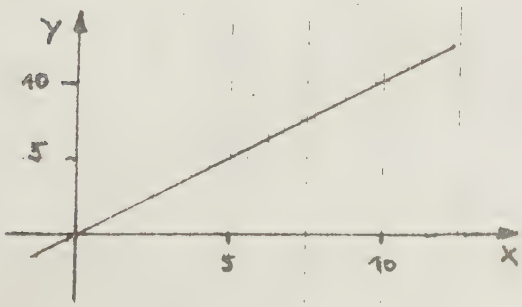


b) Zeichnen Sie folgende Funktion

x	0	5	10	15	20	25
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6



c) Wie lautet die Funktionsgleichung für folgende Funktion ?



Die Funktionsglei[illegible]
lautet

y = ...

LEHRTEXT: AUSSAGENLOGIK

In diesem kurzen Lehrtext wollen wir eine Methode lernen, wie man sich schnell einen Überblick über die Bedingungen verschafft, unter denen eine mathematische Aussage *wahr* oder *falsch* ist.
Nehmen wir an, wir wollen wissen, unter welchen Bedingungen für die Faktoren x und y folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt x·y zweier Faktoren x und y ist Null."

(x und y seien Platzhalter für Elemente der Menge der rationalen Zahlen.)

Diese Aussage ist *falsch* für: $x=1$ und $y=-3$; oder
$x=3$ und $y=7$; oder allgemein

$x \neq 0$ und $y \neq 0$

Diese Aussage ist *richtig* für $x \neq 0$ und $y=0$
$x=0$ und $y \neq 0$
$x=0$ und $y=0$

Für die oben angenommenen Bedingungen, daß $x=0$ oder $x \neq 0$ und $y=0$ oder $y \neq 0$ sein kann, erhält man vier mögliche Fälle, ein Produkt x·y zu bilden:

1. $x=0$ und $y=0$
2. $x=0$ und $y \neq 0$
3. $x \neq 0$ und $y=0$
4. $x \neq 0$ und $y \neq 0$

Dabei hatten wir festgestellt, daß für die ersten drei Fälle obige Aussage *wahr*, für den letzten Fall aber *falsch* ist.

Übersichtlicher lassen sich die Bedingungen für zwei Größen, für die eine bestimmte Aussage *wahr* ist, mithilfe von *Wahrheitstafeln* aufsuchen.

Wahrheitstafel:

		Größe y erfüllt	
		Bed. 1 $y=0$	Bed. 2 $y \neq 0$
Größe x erfüllt	Bed. 1 $x=0$	A	B
	Bed. 2 $x \neq 0$	C	D

Die Wahrheitstafel erhält man, indem man die Bedingungen für die erste Größe x untereinander, für die zweite Größe y nebeneinander hinschreibt. Dann werden zwischen den einzelnen Bedingungen Trennstriche gezogen, so daß nebenstehendes Schema entsteht.
Auf diese Weise kann man alle Kombinationen von zwei Größen mit entsprechender Zahl von Bedingungen leicht bestimmen.

Im obigen Beispiel entspricht

Feld A: $x=0$ und $y=0$
Feld B: $x=0$ und $y \neq 0$
Feld C: $x \neq 0$ und $y=0$
Feld D: $x \neq 0$ und $y \neq 0$

Im zweiten Schritt untersucht man für jede dieser Kombinationen, ob obige Aussage *wahr* ist. Trifft dies zu, so trägt man in das entsprechende Feld ein w (wahr) ein. Trifft die Aussage nicht zu, so schreibt man in das entsprechende Feld ein *f* (falsch).

	$y=0$	$y \neq 0$
$x=0$	w	w
$x \neq 0$	w	

Wir beginnen mit Feld A ($x=0$ und $y=0$) und überprüfen, ob die Aussage *"Das Produkt x·y ist Null"* wahr ist. Für $x=0$ und $y=0$ ist $x \cdot y=0$. Deshalb kann man in Feld A ein w eintragen. Ebenso in Feld B und Feld C.

	$y=0$	$y \neq 0$
$x=0$	w	w
$x \neq 0$	w	f

Für Feld D ($x \neq 0$ und $y \neq 0$) ist obige Aussage *falsch*. Das Produkt x·y zweier Faktoren, die ungleich Null sind, ist nicht Null. Deshalb muß in Feld D ein *f eingetragen* werden.

Wir haben damit einen Überblick über die Bedingungen von x und y erhalten, für die die Aussage *"Produkt x·y ist Null"* wahr oder falsch ist.
Nun bleibt nur noch die Aufgabe, die Ergebnisse als Satz zu formulieren. In obiger Wahrheitstafel erkennt man, daß für $x=0$ die Aussage wahr ist, unabhängig davon, welche Bedingungen y annimmt; in Zeile $x=0$ kommen nur wahre Aussagen vor. Gleiches gilt für die Spalte $y=0$

Deshalb kann folgende Aussage formuliert werden:

"Das Produkt x·y zweier Faktoren x und y ist Null, *wenn $x=0$ ODER $y=0$ ist."*

Solche Aussagen nennt man ODER-Aussagen:

Logische Aussagen, die immer wahr sind, wenn eine Größe x ODER eine Größe y eine bestimmte Bedingung erfüllt, nennt man eine ODER-Aussage.

Weiteres Beispiel:

Gesucht sind die Bedingungen für die Faktoren x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt x·y zweier Faktoren x und y ist ungleich Null."

Für x,y wollen wir wieder die Bedingungen $x,y=0$ und $x,y \neq 0$ annehmen.
Dann erhält man folgende Wahrheitstafel:

	$y=0$	$y \neq 0$
$x=0$	f	f
$x \neq 0$	f	w

Aus der Wahrheitstafel erkennt man, daß die Aussage *"Das Produkt x·y zweier Faktoren x und y ist ungleich Null"* nur wahr ist, wenn $x \neq 0$ UND $y \neq 0$.

Solche Aussagen nennt man UND-Aussagen:

Logische Aussagen, die immer wahr sind, wenn eine Größe x UND eine Größe y eine bestimmte Bedingung erfüllen, nennt man eine UND-Aussage.

Weiteres Beispiel:

Gesucht seien die Bedingungen für die Summanden x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Die Summe x+y zweier nichtnegativer Zahlen x und y ist ungleich Null."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x,y = 0 oder x,y > 0 (lies: x,y größer Null)

Das Ergebnis läßt sich wieder am übersichtlichsten in einer Wahrheitstabelle darstellen:

		Größe y: y = 0	y > 0
Größe x	x = 0	f	ω
	x > 0	ω	ω

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Die Summe x+y zweier nichtnegativer Zahlen x und y ungleich Null, wenn x ODER y ungleich Null ist!"

Es handelt sich bei diesem Beispiel also wieder um eine ODER-Aussage.

Weiteres Beispiel:

Gesucht seien die Bedingungen für die Summanden x und y, für die die Aussage wahr ist:

"Die Summe x+y zweier nichtnegativer Zahlen x und y ist Null."

Für x, y wollen wir folgende Bedingungen annehmen:

x, y = 0 oder x, y > 0

Dann erhält man folgende Wahrheitstafel:

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Die Summe x+y zweier nichtnegativer Zahlen x und y ist Null, wenn x UND y Null sind."

Hier handelt es sich um eine UND-Aussage!

Überprüfen Sie sich nun selbst an den folgenden Übungsaufgaben.

ÜBUNGSAUFGABEN:

Gesucht sind die Bedingungen für x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt (x+y)·(x+y) ist Null. x und y seien zwei nichtnegative Zahlen."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x,y = 0 oder x,y > 0

Stellen Sie für dieses Beispiel die Wahrheitstafel auf, und geben Sie die Bedingungen für x und y an, unter denen obige Aussage wahr ist.

Daraus kann man folgende Bedingung ablesen:

"Das Produkt (x+y)·(x+y) ist Null, wenn:

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐
UND- Aussage ☐

Gesucht sind die Bedingungen für x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt (x+y)·x·y ist Null. x und y seien zwei nichtnegative Zahlen."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x,y = 0 oder x,y > 0

Stellen Sie für dieses Beispiel die Wahrheitstafel auf, und geben Sie die Bedingungen für x und y an, unter denen obige Aussage wahr ist.

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Das Produkt (x+y)·x·y ist Null, wenn:

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐
UND- Aussage ☐

A1 (WA) Name Klasse Datum

Gesucht seien die Bedingungen für x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt (x+y)·(x+y) ist Null, x und y seien zwei nichtnegative Zahlen."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x,y = 0 oder x,y >0

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR X UND Y AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Das Produkt (x+y)·(x+y) ist Null, wenn :

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐

UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 50% 75% 100%

(WA)

Gesucht seien die [illegible] für die folgende Aussage wahr ist:

"Die Summe x+y zweier Zahlen ist ungleich Null."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x,y = 0 oder x,y ≠ 0

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR X UND Y AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Die Summe x+y zweier Zahlen ist ungleich Null, wenn :

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐

UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 50% 75% 100%

A2(AÄx)

Gesucht seien die Bedingungen für x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt (x+y)·y ist gleich der Zahl 12 ."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x = 1 oder x = 2
y = 3 oder y = 4

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR X UND Y AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Das Produkt (x+y)·y ist gleich der Zahl 12, wenn:

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐

UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 50% 75% 100%

A2(AÄx)

Gesucht seien die Bedingungen für x und y, für die folgende Aussage wahr ist:

"Das Produkt (x+y)·y ist gleich der Zahl 12 ."

Dabei wollen wir für x und y folgende Bedingungen annehmen:

x = 1 oder x = 2
y = 3 oder y = 4

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR X UND Y AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Das Produkt (x+y)·y ist gleich der Zahl 12, wenn:

_____

_____

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐

UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 50% 75% 100%

(AA)

Gesucht seien die Bedingungen für P und v, für die folgende Aussage wahr ist:

"Die Summe der Quadrate zweier Zahlen P und v ist gleich der Zahl 1o."

Dabei wollen wir für P und v folgende Bedingungen annehmen:

P = 0 oder P = 1
v = 2 oder v = 3

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR P UND v AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Die Summe der Quadrate zweier Zahlen P und v ist gleich der Zahl 1o, wenn :

Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐
UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 5o% 75% 1oo%

(AA)

Gesucht seien die Bedingungen für U und s, für die folgende Aussage wahr ist:

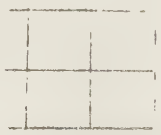
"Das Produkt (U+s)·U ist gleich der Zahl 2o."

Dabei wollen wir für U und s folgende Bedingungen annehmen:

U = 1 oder U = 2
s = 3 oder s = 4

STELLEN SIE FÜR DIESES BEISPIEL DIE WAHRHEITSTAFEL AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR U UND s AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6



Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Das Produkt (U+s)·U ist gleich der Zahl 2o, wenn:

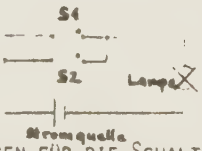
Es handelt sich um eine ODER-Aussage ☐
UND- Aussage ☐

Sicherheit: 0% 25% 5o% 75% 1oo%

P 1(PA)

TREPPENHAUSBELEUCHTUNG

Die Schaltung einer Treppenhausbeleuchtung sieht grob vereinfacht folgendermaßen aus →



GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR DIE SCHALTER S1 UND S2 AN, UNTER DENEN FOLGENDE AUSSAGE WAHR IST :

"Die Treppenhauslampe L brennt."

Dabei wollen wir für S1 und S2 folgende Bedingungen annehmen:

S1 offen (—/•—) oder geschlossen (—•—)
S2 offen (—/•—) oder geschlossen (—•—)

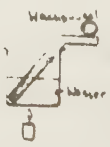
Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Daraus kann man folgende Bedingungen ablesen:

"Die Treppenhauslampe L brennt, wenn :

Sicherheit: 0% 25% 5o% 75% 1oo%

P 2(PA)



Eine Wachskugel, die auf einem Stab liegt, der in ein Gefäß mit Wasser getaucht ist, schmilzt nur dann ,

wenn die Wassertemperatur T größer als die Schmelztemperatur des Wachses (T_S= 4o °C) und der Stab aus gut wärmeleitendem Material besteht.

Gesucht seien die Bedingungen, für die folgende Aussage wahr ist:

"DIE WACHSKUGEL SCHMILZT! "

Dabei wollen wir für die Temperatur T und das Material M folgende Bedingungen annehmen:

T_1 = 2o °C oder T_2 = 6o °C

Stabmaterial: Holz oder Kupfer

STELLEN SIE FÜR OBIGEN VERSUCH DIE WAHRHEITSTABELLE AUF, UND GEBEN SIE DIE BEDINGUNGEN FÜR T UND M AN, UNTER DENEN OBIGE AUSSAGE WAHR IST.

Schwierigkeit: 1 2 3 4 5 6

Die Wachskugel schmilzt, wenn :

Sicherheit: 0% 25% 5o% 75% 1oo%

Vergleich Lehrerunterricht
mit Unterricht nach Lehrtext

1. Note in Mathematik wird

1	2	3	4	5	6	7
schlechter			kein Einfluß			besser

2. Arbeitsbelastung im Mathematikunterricht ist

1	2	3	4	5	6	7
geringer			bleibt gleich			größer

3. Arbeitsbelastung zu Hause ist

1	2	3	4	5	6	7
geringer			bleibt gleich			größer

4. Lernleistung im Unterricht ist

1	2	3	4	5	6	7
schlechter			bleibt gleich			besser

5. Arbeitsatmosphäre in Schule ist

1	2	3	4	5	6	7
schlechter			bleibt gleich			besser

6. Diskussionen sind

1	2	3	4	5	6	7
weniger möglich			bleiben gleich			eher möglich

7. Konkurrenzverhältnis zwischen Schülern wird

1	2	3	4	5	6	7
abgeschwächt			nicht verändert			verstärkt

8. Gespräche zwischen zwei Schülern über Probleme in Mathematik sind

1	2	3	4	5	6	7
weniger möglich			unverändert			eher möglich

9. Glauben Sie, daß sich der Einsatz von Lehrtexten im Unterricht auf Schüler, die fehlen oder aufgrund momentaner Schwierigkeiten dem Unterricht nicht folgen können

1	2	3	4	5	6	7
positiv			weder positiv noch negativ			negativ

auswirkt ?

10. Selbständiges Arbeiten ist

1	2	3	4	5	6	7
eher möglich			unverändert			weniger möglich

11. Abhängigkeit vom Lehrer wird

1	2	3	4	5	6	7
verringert			bleibt			verstärkt

12. Kann man davon ausgehen, daß beim Einsatz von Lehrtexten der Schwierigkeitsgrad der Inhalte

1	2	3	4	5	6	7
höher			gleich			niedriger

gewählt werden darf ?

N A M E:_____

2.1 Lehrtext A

2.2 Lehrtext B

2.3 Leitprogramm A

2.4 Leitprogramm B

2.5 Antwortbogen A

2.6 Antwortbogen B

LEHRTEXT A

BESCHREIBUNG VON UNTERSUCHUNGEN MIT HILFE DER RELATIONEN UND FUNKTIONEN

KARL WOLF HOFFMANN

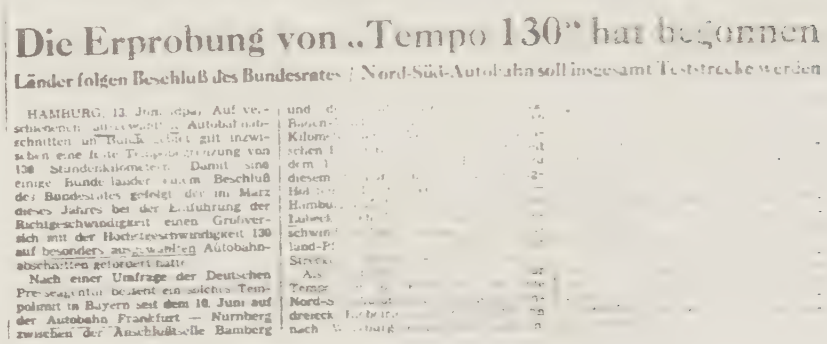
INSTITUT FÜR DIDAKTIK DER PHYSIK
UNIVERSITÄT FRANKFURT

EINFÜHRUNG UND ÜBERBLICK

Der vorliegende Lehrtext hat das Ziel, Sie auf etwas ungewohnte Weise in das Gebiet der *Relationen* und *Funktionen* einzuführen. Ungewohnt deshalb, weil die Lehrinhalte nicht von einem Lehrer, sondern über den vorliegenden Lehrtext vermittelt werden. Weiterhin ungewöhnlich ist, daß dieser Lehrtext anhand praktischer Beispiele die Zweckmäßigkeit der Einführung mathematischer Begriffe und Methoden aufzeigen will.

In dem vorliegenden Lehrtext beginnen wir mit der Planung einer Untersuchung aus der Verkehrspsychologie, an der gezeigt werden soll, wie man mit Hilfe mathematischer Darstellungen und Methoden der Mengenlehre die Untersuchung kurz und eindeutig beschreiben kann.
Danach werden wir lernen, die Ergebnisse von Untersuchungen aus verschiedenen Wissensgebieten durch mathematische Methoden übersichtlich zu machen. Besonderes Gewicht wird auf die graphische Darstellung von Untersuchungsergebnissen und das Erkennen von einfachen mathematischen Zusammenhängen zwischen zwei Größen gelegt.

1. BESCHREIBUNG EINER UNTERSUCHUNG MIT HILFE DER MENGENLEHRE



Die Erprobung von „Tempo 130" hat begonnen

Länder folgen Beschluß des Bundesrates | Nord-Süd-Autobahn soll insgesamt Teststrecke werden

HAMBURG, 13. Juni (dpa). Auf verschiedenen [illegible] Autobahnabschnitten im Bereich [illegible] gilt inzwischen eine feste Tempobegrenzung von 130 Stundenkilometern. Damit sind einige Bundesländer einem Beschluß des Bundesrates gefolgt, der im März dieses Jahres bei der Einführung der Richtgeschwindigkeit einen Großversuch mit der Höchstgeschwindigkeit 130 auf besonders ausgewählten Autobahnabschnitten gefordert hatte.

Nach einer Umfrage der Deutschen Presseagentur bedeutet ein solches Tempolimit in Bayern seit dem 10. Juni auf der Autobahn Frankfurt — Nürnberg zwischen der Anschlußstelle Bamberg

und d[illegible]
Bayern-[illegible]
Kilome[illegible]
schen [illegible]
dem [illegible]
diesem [illegible]
Hal[illegible]
Hambu[illegible]
Lubeck [illegible]
schwe[illegible]
land-P[illegible]
Strecke[illegible]
As[illegible]
Tempo[illegible]
Nord-S[illegible]
dreieck [illegible]
nach [illegible]

Das Ziel dieses Großversuches "Tempo 13o " ist es, folgende Fragestellung zu klären:

Verringert sich die Zahl der Schwerverletzten und Toten auf deutschen Autobahnen, wenn man eine zulässige Höchstgeschwindigkeit von 13o km/h einführt?

Wieso vermutet man einen Zusammenhang zwischen zulässiger Höchstgeschwindigkeit (kurz: ZHG) und der Zahl der Schwerverletzten und Toten ?
Betrachten wir einen Wagen, der mit 2oo km/h über die Autobahn "fegt". Er wird alle langsameren Fahrzeuge, die auf der linken Spur überholen wollen, auf die rechte Spur zwingen. Zum Überholen von noch langsameren Wagen werden diese nach rechts gefahrenen Wagen wieder auf die linke Spur überwechseln. Ein schneller Fahrer bewirkt demnach viele

Fahrbahnwechsel von nicht so schnellen Wagen. Da aber ein Großteil der Unfälle auf Autobahnen gerade beim Fahrbahnwechsel auftritt, könnte sich die Zahl der Unfälle bei gleichmäßiger Geschwindigkeit der Verkehrsteilnehmer verringern. Die Gleichmäßigkeit von Fahrgeschwindigkeiten versucht man durch die Einführung der ZHG (zulässigen Höchstgeschwindigkeit) zu erreichen. Da solche Beschränkungen starke Auswirkungen auf die Stimmung der Autofahrer und den Verkauf von schnellen Wagen haben, versucht die BDR vorher durch diese Großuntersuchung zu klären, ob diese Beschränkung die Zahl der Schwerverletzten und Toten auf deutschen Autobahnen wesentlich verringert.
In der Bundesrepublik wird deshalb auf verschiedenen, ausgewählten Autobahnabschnitten eine ZHG von 13o km/h eingeführt. In den folgenden Jahren wird nun die Zahl der Schwerverletzten und Toten auf diesen Autobahnabschnitten verglichen mit entsprechenden Zahlen von solchen Autobahnabschnitten, für die keine ZHG festgelegt wurde. Durch diesen Vergleich ist die BDR in der Lage, den Sinn einer generellen Geschwindigkeitsbegrenzung abzuschätzen.

Planung der Untersuchung über die Folgen einer Einführung von ZHG auf deutschen Autobahnen:

Wir wollen nun lernen, wie man eine Untersuchung vom obigen Typ plant, und welche Probleme dabei bewältigt werden müssen. Allerdings wollen wir die Untersuchungsplanung auf eine etwas sinnvollere Fragestellung beziehen, als sie von der BDR vorgeschlagen wurde. Nämlich:

"Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Zahl der Schwerverletzten und Toten auf deutschen Autobahnen und zulässigen Höchstgeschwindigkeiten im Bereich von 1oo km/h bis 14o km/h."

Wir wollen also nicht nur die Folgen einer Geschwindigkeitsbeschränkung auf 13o km/h, sondern über den Geschwindigkeitsbereich von 1oo bis 14o km/h bezüglich der Zahl der Schwerverletzten und Toten untersuchen.

Ausgehend von der obigen Fragestellung müssen wir zuerst klären, was wir unter dem Begriff "Schwerverletzter" verstehen wollen, da dieser umgangssprachlich in verschiedener Bedeutung verwendet wird. Man muß also verlangen, daß die Einstufung eines Verletzten als "Schwerverletzter" durch die an der Untersuchung beteiligten Gutachter(Polizisten, Ärzte, u.s.w.) einheitlich erfolgt. Es könnte sonst leicht vorkommen, daß der eine Gutachter einen Verletzten als "schwerverletzt" bezeichnet, während ein anderer Gutachter diesen als "nicht schwerverletzt" beurteilt. Eine objektive Aussage über den Zusammenhang von ZHG und der Zahl der Schwerverletzten auf deutschen Autobahnen ist dann nicht mehr gewährleistet.

Beachte: Aussagen über beobachtbare Größen sind nur dann überprüfbar, wenn die in der Aussage vorkommenden Begriffe eindeutig definiert sind. Man verlangt, daß den Begriffen *mengenbildende Eigenschaften* im mathematischen Sinn zugeschrieben werden können.

1.1 MENGE UND ELEMENT

Menge M

Unter einer *Menge M* versteht man die gedankliche Zusammenfassung von Objekten mit bestimmten, wohlunterscheidbaren Eigenschaften. Die zu einer Menge gedanklich zusammengefaßten Objekte mit bestimmten Eigenschaften nennt man *Elemente* der Menge.

Element

Anmerkung: Der Begriff "Element einer Menge" ist sehr weitreichend. Er kann sich auf Lebewesen (Menge der Schwerverletzten), auf Sachen(Menge der Autobahnen), auf Ereignisse(Menge der Verkehrsunfälle), auf sprachliche Gebilde(Menge der Hauptwörter), auf Zahlen(Menge der ganzen Zahlen), u.s.w. beziehen.

Unter bestimmten Elementen einer Menge versteht man: Es muß feststehen, welche Elemente zur Menge gehören und welche nicht. Die Menge der "Schwerverletzten auf deutschen Autobahnen" ist erst dann eine Menge, wenn die Eigenschaft "schwerverletzt" eindeutig definiert ist.

Weiterhin verlangt man: Die Elemente der Menge müssen unterscheidbar sein. Eine "Herde Schafe" ist in diesem Sinn erst eine Menge, wenn jedes Schaf durch ein Zeichen eindeutig von anderen Schafen unterscheidbar ist.

Nachdem wir festgestellt haben, daß eine Überprüfung von Aussagen über die Wirklichkeit nur dann möglich ist, wenn die in der Aussage vorkommenden Begriffe eindeutig definiert sind, müssen wir für obige Fragestellung den Begriff "Schwerverletzter" erklären:

"Schwerverletzt"soll der Verletzte genannt werden, der nach einem halben Jahr immer noch wegen seiner Unfallverletzungen in ärztlicher Behandlung ist.

Alle übrigen Begriffe "Autobahn", "Toter" und "ZHG" werden dagegen umgangssprachlich eindeutig verwendet. Sie müssen deshalb für diese Untersuchung nicht genauer definiert werden.

Zur Durchführung der Untersuchung müßte man nun weiterhin festlegen, welche verschiedenen Werte von ZHG in die Untersuchung aufgenommen werden sollen. Da sich die Untersuchung auf den Geschwindigkeitsbereich von 1oo - 14o km/h beziehen soll, sollen folgende Werte für die ZHG festgelegt werden: 1oo km/h, 12o km/h und 14o km/h. Diese drei Geschwindigkeiten müßte man nun drei ungefähr gleichartigen Autobahnabschnitten zuordnen, und die Unfallfolgen über einen längeren Zeitraum beobachten.
Die Forderung nach Gleichartigkeit der untersuchten Autobahnabschnitte ist sehr wichtig. Sie bedeutet:
Die Zahl der Unfälle auf den jeweiligen Autobahnabschnitten sollte vor Beginn der Untersuchung ungefähr gleich sein.

Erst dann kann man aus der Verringerung der Unfallzahlen für die verschiedenen Autobahnabschnitte zuverlässig auf die Folgen der Einführung von ZHG schließen.

Nehmen wir an, wir hätten in Deutschland drei gleichartige Autobahnabschnitte E 1, E 5, E 9 bestimmen können, auf den wir die ZHG von 1oo km/h, 12o km/h und 14o km/h durch Verordnung eingeführt hätten. Die Untersuchung bezöge sich dann auf die "Menge der ZHG von 1oo km/h, 12o km/h, 14o km/h" und auf "Menge der gleichartigen Autobahnabschnitte E 1, E 5, E 9". Dabei könnten wir z.B. dem Autobahnabschnitt E 1 eine Geschwindigkeit von 1oo km/h, dem Abschnitt E 5 eine Geschwindigkeit von 12o km/h und dem Abschnitt E 9 eine Geschwindigkeit von 14o km/h zuordnen. Wesentlich übersichtlicher sind solche Zuordnungen zwischen den Elementen zweier Mengen, wenn man sich der mathematischen Darstellungsweisen bedient. Deshalb werden wir in den folgenden Abschnitten zuerst die mathematische Darstellung von Mengen und dann die Darstellung von zugeordneten Elementen zweier Mengen behandeln.

1.2 DARSTELLUNG VON MENGEN

In der Mathematik unterscheidet man zwei Arten der Darstellung von Mengen, die <u>aufzählende</u> und <u>beschreibende</u> Darstellung.

AUFZÄHLENDE DARSTELLUNG VON MENGEN

Bei der aufzählenden Darstellung von Mengen werden die Elemente der Menge einzeln "aufgezählt".

Beispiel: Die Menge A der in der Untersuchung betrachteten ZHG läßt sich in aufzählender Schreibweise darstellen:

$A = \{100 \text{ km/h}, 120 \text{ km/h}, 140 \text{ km/h}\}$ $M = \{\ldots\}$

Die Menge B der untersuchten Autobahnabschnitte ist dann :

$B = \{E\ 1, E\ 5, E\ 9\}$

Man könnte die Menge A auch in der Form darstellen:

$A = \{140 \text{ km/h}, 100 \text{ km/h}, 120 \text{ km/h}\}$

Beachte: Zwei Mengen sind *gleich*, wenn alle ihre Elemente gleich sind. *Gleichheit von Mengen*
Bei der Aufzählung ist also die Reihenfolge der Elemente *beliebig*.

Um auszudrücken, daß ein bestimmtes Element zu einer Menge M gehört verwendet man das Zeichen $\in$.

140 km/h $\in$ A bedeutet: Die Geschwindigkeit 14o km/h ist ein Element der Menge A. $m \in M$

Also: $E\ 1 \in B$, wenn $B = \{E\ 1, E\ 5, E\ 9\}$

oder

$4 \in M$, wenn $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Besteht eine Menge aus sehr vielen Elementen, die man nicht alle aufzählen will oder kann, so schreibt man:

$$A = \{a, b, c, \ldots\}$$

Die drei Punkte sollen andeuten, daß die Aufzählung der Elemente der Menge nicht abgeschlossen ist.

Die Menge der Intelligenzquotienten, die ein Mensch in einem Intelligenztest erreichen kann, läßt sich danach in aufzählender Schreibweise darstellen als:

$$I = \{\ldots, 98, 99, 100, 101, 102, \ldots\}$$

Die Aufzählung der Elemente der Menge I ist demnach in beiden Richtungen nicht abgeschlossen.

BESCHREIBENDE DARSTELLUNG VON MENGEN

Im Gegensatz zur aufzählenden Darstellung, bei der die <u>Elemente</u> der Menge <u>aufgezählt</u> werden, wird bei der beschreibenden Darstellung diejenige <u>Eigenschaft</u> aller Elemente der Menge M angegeben, nach der die Elemente eindeutig bestimmt werden können.

In einer Untersuchung über "sichere" Autotypen könnte solch eine Eigenschaft z.B. sein:
"Zur Menge der in Deutschland <u>hergestellten</u> "sicheren" Autotypen sollen solche gehören, bei denen in höchstens 1 % aller Unfälle "Schwerverletzte oder Tote" zu beklagen sind."

Aufgrund dieser Vorschrift könnte man nun die "Menge der sicheren Autotypen" bestimmen. Angenommen, man käme zu folgender Menge:

$$M = \{\text{Typ A}, \text{Typ B}, \text{Typ C}\}$$

Würde man die mengenbildende Vorschrift in folgender Weise geringfügig abändern:

"Zur Menge der in Deutschland <u>zugelassenen</u> "sicheren" Autotypen sollen solche gehören, bei denen in höchstens 1 % aller Unfälle "Schwerverletzte oder Tote" zu beklagen sind,"

so würde man in die Untersuchung auch solche Autotypen zur Menge der „sicheren" Autotypen rechnen, die <u>nicht</u> in Deutschland <u>hergestellt</u> werden. Man käme dann dann vielleicht zu folgender Menge:

$$C = \{\text{Typ A, Typ B, Typ C, Typ D, Typ E}\}$$

An diesen zwei Beispielen sehen Sie, daß die beschreibende Darstellung einer Menge M nicht nur eine eindeutige Beschreibung der Eigenschaft der Elemente dieser Menge verlangt (z.B. "in höchstens 1 % aller Unfälle "Schwerverletzte oder Tote" zu beklagen sind"), sondern auch die Angabe der Menge, aus der die Elemente von M ausgesondert werden sollen (z.B. "alle in Deutschland hergestellten Autotypen" oder "alle in Deutschland zugelassenen Autotypen").

Die Menge, aus der die Elemente einer bestimmten Menge M aufgrund einer Vorschrift ausgesondert werden, nennt man *Grundmenge G*

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Zahlmenge B "aller natürlichen Zahlen kleiner 3", so erhält man

$$B = \{1,2\} ,$$

da als Grundmenge G die *Menge der natürlichen Zahlen* angegeben wurde.

Dagegen führt die Vorschrift "alle ganzen Zahlen kleiner als 3" zur Menge:

$$B = \{. . ., -2, -1, o,1,2\} ,$$

da diesmal als Grundmenge G die *Menge der ganzen Zahlen* angegeben wurde.

Im Bereich der Zahlen gibt es einige wichtige Mengen, die immer wieder als Grundmenge gewählt werden:

Die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, . . .\}$ $\mathbb{N}$

Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{. . ., -2, -1, o,1,2, . .\}$ $\mathbb{Z}$

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} = \{$Menge aller positiven und negativen Brüche und Null$\}$ $\mathbb{Q}$

Die Menge A "aller natürlichen Zahlen kleiner als 3" läßt sich kurz und eindeutig beschreiben durch

$$A = \{x \mid x \text{ kleiner } 3 \text{ und } x \in \mathbb{N}\}$$

oder noch kürzer

$$A = \{x \mid x \text{ ist kleiner } 3\}_{G=\mathbb{N}}$$

(Lies: Die Menge A enthält alle Elemente x der Grundmenge $G = \mathbb{N}$, die die Bedingung erfüllen: "x kleiner 3".)

Der Buchstabe x steht für alle Elemente der Grundmenge G, die die mengenbildende Vorschrift für A erfüllen. Man nennt daher x einen Platzhalter für die Elemente von A. Die einzelnen Elemente von A bestimmt man nun so, daß

man für jedes Element von G überprüft, ob die Aussage "Element von G ist kleiner 3" wahr ist. In obigem Beispiel ist

$$G = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, . . .\}$$

Setzt man das erste Element von G an die Stelle des Platzhalters x, so erhält man die wahre Aussage:

" 1 ist kleiner als 3".

Die Zahl 1 ist also Element von A.

Setzt man das nächste Element von G an die Stelle des Platzhalters x, so entsteht wiederum eine wahre Aussage:

" 2 ist kleiner als 3".

Die Zahl 2 ist also auch Element von A.

Das nächste Element von G führt dagegen zu der falschen Aussage:

"3 ist kleiner als 3".

Die Zahl 3 ist demnach kein Element von A.

Aus der beschreibenden Darstellung von A

$$A = \{x \mid x \text{ ist kleiner als } 3\}_{G=\mathbb{N}}$$

gelangt man nach obigem Verfahren zur aufzählenden Darstellung

$$A = \{1, 2\}$$

Die Menge B "aller ganzen Zahlen, die kleiner als 3 sind" läßt sich dann schreiben:

$$B = \{y \mid y \text{ ist kleiner als } 3\}_{G=\mathbb{Z}}$$

Diesmal haben wir den Buchstaben y als Platzhalter für die Elemente von B gewählt. Wir hätten auch andere Buchstaben oder Zeichen benutzen können (z.B.: a, b, k, l, u, φ, α, . . .).

Im nichtmathematischen Bereich ist die Bestimmung der Elemente einer Menge, die in beschreibender Form gegeben ist, häufig mit sehr großem Aufwand verbunden.

Beispiel: Gesucht sind die Elemente der "Menge der gleichartigen Autobahnabschnitte" aufgrund der Vorschrift:
"Zur Menge sollen die Autobahnabschnitte in Deutschland mit einer Länge von 100 km gehören, auf denen im Jahre 1973 im Mittel mindestens 200 und höchstens 250 Unfälle gezählt wurden."

Es bedarf umfangreicher Nachforschungen, wenn man einzelne Elemente der Menge bestimmen will.
Dabei ist es durchaus möglich, daß kein Autobahnabschnitt in Deutschland obige Eigenschaften erfüllt.

Es besteht also ein wesentlicher Unterschied zwischen aufzählender und beschreibender Darstellung von Mengen.

Beachte: Die aufzählende Schreibweise setzt voraus, daß man die Elemente der Menge schon kennt.

Bei der beschreibenden Darstellung dagegen muß man die Eigenschaften der Elemente der Menge eindeutig angeben, die allen Elementen gemeinsam sein sollen. (z.B. "Vielfaches der Zahl 3").
Weiterhin muß die Grundmenge G bekannt sein, aus der die Elemente der Menge ausgesondert werden sollen. ("Alle in Deutschland hergestellten Autotypen").
Die Elemente selbst müssen aufgrund dieser Vorschrift erst ermittelt werden.

Doch nun zurück zu unserer eigentlichen Fragestellung der Planung einer Untersuchung über den Zusammenhang von ZHG und Unfallfolgen auf deutschen Autobahnen. Wir hatten angenommen, es gäbe drei gleichartige Autobahnabschnitte E 1, E 5 und E 9, denwir die ZHG 1oo km/h, 12o km/h und 14o km/h nach folgender Vorschrift zuordnen wollten: E 1 eine ZHG von 1oo km/h, E 5 eine ZHG von 12o km/h und E 9 eine ZHG von 14o km/h. Solche Zuordnungen lassen sich mit Hilfe geordneter Paare und Paarmengen wesentlich übersichtlicher darstellen.

2. PAARMENGEN

2.1 GEORDNETE PAARE

Im vergangenen Kapitel haben wir gelernt, wie man Mengen [illegible], deren Elemente aus einzelnen Objekten, Zahlen [illegible]. Durch sogenannte *Paarbildung* können jedoch aus den Elementen zweier Mengen A und B neue Elemente gebildet werden. Diese nennt man *geordneten Paare*.

Ist a ∈ A und b ∈ B so nennt man den Ausdruck *(a | b)* ein *geordnetes Paar* von Elementen aus A und B. *geordnetes Paar (a|b)*

Beispiel: Gegeben sei die Menge der gleichartigen Autobahnabschnitte

$$A = \{E\ 1,\ E\ 5,\ E\ 9\}$$

und die Menge der zu untersuchenden ZHG

$$B = \{1oo\ km/h,\ 12o\ km/h,\ 14o\ km/h\}$$

Ein geordnetes Paar von Elementen aus A und B ist z.B.:

(E 1 | 1oo km/h) oder (E 1 | 14o km/h) oder
(E 9 | 12o km/h)

Die beiden Elemente eines geordneten Paares nennt man die *Komponenten*. Man spricht von *erster* Komponente und *zweiter* Komponente.

Die erste Komponente des geordneten Paares (□ | Quadrat) ist die symbolische Figur □ , die zugeordnete zweite Komponente der Begriff "Quadrat".

Anmerkung: Geordnet bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Elemente eines Paares ankommt. Dabei soll die erste Komponente eines geordneten Paares stets ein Element der zuerst genannten Menge, die zweite Komponente stets ein Element der zuletzt genannten Menge sein.

Bezüglich der obigen Menge A und B ist das Paar (1oo km/h | E 9) kein geordnetes Paar, da 1oo km/h kein Element von A ist.

Zwei geordnete Paare (a | b) und (u | v) sind *gleich*, wenn a = u und b = v ist. *Gleichheit von geordneten Paaren*

Das Paar (E 5 | 1oo km/h) ist deshalb verschieden von dem Paar (1oo km/h | E 5).

Man kann auch diese geordneten Paare als Elemente einer Menge auffassen, die man Paarmenge nennt.

Eine *Paarmenge* bezüglich zweier Mengen A und B ist eine *Menge von geordneten Paaren* aus A und B. *Paarmenge*

Beispiel: Die in die Untersuchungsplanung aufgenommene Zuordnung von Autobahnabschnitten E 1, E 5 und E 9 zu den ZHG 1oo km/h, 12o km/h und 14o km/h können wir kurz als Paarmenge schreiben:

$$P = \{(E1 | 1ookm/h), (E5 | 12okm/h), (E9 | 14okm/h)\}$$

Paarmengen begegnen uns fast überall. Ob im Telefonbuch (Name | Telefonnr.), ob in der Auslage eines Geschäftes (Ware | Preis), ob bei einem physikalischen Experiment (Spannung U | Strom I) oder im Sport (1oo m Strecke | Weltrekordzeit) überall werden Elemente einer Menge A Elemente einer zweiten Menge B zugeordnet.

In der Mathematik, wo dieser Begriff geprägt wurde, erfolgt die Paarbildung in der Regel zwischen Elementen zweier Zahlmengen.

Beispiel: $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{Q}$

Eine Paarmenge bezüglich A und B ist z.B.:

$P = \{(1 \mid \frac{1}{1}), (2 \mid \frac{1}{2}) (3 \mid \frac{1}{3}), \ldots\}$

Häufig sind die Mengen A und B <u>gleich</u>.

Beispiel: $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$

Eine Paarmenge bezüglich A und B ist z.B.:

$P = \{(1 \mid 1), (2 \mid 2), (3 \mid 3), \ldots\}$

Betrachten wir noch einmal die in der Untersuchungsplanung festgelegte Zuordnung von Autobahnabschnitten und ZHG:

$P = \{(E\ 1 \mid 1oo\ km/h), (E\ 5 \mid 12o\ km/h), (E\ 9 \mid 14o\ km/h)\}$

Diese Paarmenge stellt nur eine mögliche Form der Zuordnung von Autobahnabschnitten zu ZHG dar.
Man hätte auch die folgende Zuordnung vornehmen können:

$P = \{(E\ 9 \mid 1oo\ km/h), (E\ 5 \mid 14o\ km/h), (E\ 1 \mid 12o\ km/h)\}$

Welche Möglichkeiten bestehen noch, den Elementen von A Elemente von B zuzuordnen ? Dies führt uns zum Begriff der Produktmenge.

2.3 PRODUKTMENGE

Die *Produktmenge* $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge <u>aller</u> geordneten Paare aus A und B. Die Menge $A \times B$ aller geordneten Paare aus

Produktsmenge $A \times B$

$A = \{E\ 1, E\ 5, E\ 9\}$ und $B = \{1oo\ km/h, 12o\ km/h, 14o\ km/h\}$

ist gegeben durch

$A \times B = \{(E\ 1 \mid 1oo\ km/h), (E\ 1 \mid 12o\ km/h), (E\ 1 \mid 14o\ km/h),$
$(E\ 5 \mid 1oo\ km/h), (E\ 5 \mid 12o\ km/h), (E\ 5 \mid 14o\ km/h),$
$(E\ 9 \mid 1oo\ km/h), (E\ 9 \mid 12o\ km/h), (E\ 9 \mid 14o\ km/h)\}$

Aus der Fülle aller möglichen geordneten Paare der Menge $A \times B$ stellt die oben festgelegte Zuordnung

$P = \{(E\ 1 \mid 1oo\ km/h), (E\ 5 \mid 12o\ km/h), (E\ 9 \mid 14o\ km/h)\}$

nur eine willkürliche <u>Teilmenge</u> von $A \times B$ dar. Man hätte genauso gut die Zuordnung in folgender Weise durchführen können:

$R = \{(E\ 1 \mid 14o\ km/h), (E\ 5 \mid 12o\ km/h), (E\ 9 \mid 1oo\ km/h)\}$

Beispiel aus der Mathematik:

Gegeben seien die Mengen

$A = \{1,2\} = B$

Die Produktmenge von A und B ist dann:

$A \times B = \{(1 \mid 1), (1 \mid 2), (2 \mid 1), (2 \mid 2)\}$

Beachte: Der Unterschied zwischen einer Paarmenge und einer Produktmenge zweier Mengen A und B liegt darin, daß eine Produktmenge <u>alle</u> geordneten Paare von A und B enthält, während eine Paarmenge stets nur eine <u>Teilmenge</u> der Produktmenge darstellt.

Zusammenfassend könnten wir unseren Untersuchungsplan in folgender Form mit Hilfe der Begriffe aus der Mengenlehre schreiben:

Wir wollen untersuchen, ob für die gleichartigen Autobahnabschnitte $A = \{E\ 1, E\ 5, E\ 9\}$ über einen Zeitraum von einem Jahr die Zahl der Schwerverletzten und Toten in einem Zusammenhang zu folgenden zulässigen Höchstgeschwindigkeiten $Z\ H\ G = \{100\ km/h, 120\ km/h, 140\ km/h\}$ stehen. Die Untersuchung beziehe sich auf die Paarmenge $G = \{(E\ 1 \mid 100\ km/h), (E\ 5 \mid 120\ km/h), (E\ 9 \mid 140\ km/h)\}$.

Sie werden sicher neugierig sein, was bei dieser Untersuchung herauskommt. Ich kann es Ihnen nicht sagen und die Bundesregierung auch nicht, sonst müßten solche Untersuchungen nicht durchgeführt werden.
Wer aber auf deutschen Autobahnabschnitten, die in die Untersuchung der Bundesregierung einbezogen werden, möglichst nicht in der Gruppe der "Schwerverletzten und Toten" erscheinen will, kann dies durch Anlegen eines Sicherheitsgurtes weitgehend verhindern. Denn z.B. schwedische Untersuchungen an 28.780 Pkw.-Unfällen erwiesen nahezu volle Schutzwirkung des Dreipunktgurtes für das Überleben bei Zusammenstößen bis zu einer Geschwindigkeit von 95 km/h!

3. RELATIONEN

Bisher haben wir gelernt, wie man mit Hilfe der Paarmengenschreibweise willkürlich Elementen einer Menge A Elemente einer zweiten Menge B zuordnen kann. Wesentlich bedeutsamer sind aber solche Paarmengen, bei denen die Komponenten der geordneten Paare in einem bestimmten Zusammenhang zueinander stehen.

Beispiel: Schon 1885 hat der Lernpsychologe EBBINGHAUS die Frage untersucht, wieviel Wiederholungen im Mittel notwendig sind, damit sich ein Mensch 8, 16, 24 oder 36 Kurzsilben einprägen kann.

Das Ergebnis kann man auffassen als eine Zuordnung von Silbenzahlen zur [illegible]

Für	8	Silben	braucht	man	2	Wiederhlg.
"	16	"	"	"	29	"
"	24	"	"	"	43	"
"	36	"	"	"	55	"

Diese Zuordnung ist nicht mehr willkürlich, sondern spiegelt einen bestimmten Zusammenhang zwischen den Größen "Silbenzahl" und "mittlere Zahl der Wiederholungen" wieder. Man kann damit zum Teil verstehen, warum das Erlernen einer Fremdsprache mit dem häufigen Wiederholen von Vokabeln verbunden ist.

[illegible] in einem bestimmten Zusammenhang zueinander stehen, nennt man *Relationen*.

Eine *Relation* bezüglich zweier Mengen A und B wird durch [illegible] A bestimmte Elemente von B zuordnet.

In obiger Untersuchung bestehen die Mengen A und B aus den möglichen Silbenzahlen und der mittleren Zahl der Wiederholungen:

A = {8 Silben, 16 Silben, 24 Silben, 36 Silben} und

B = {1 Wiederhlg., 2 Wiederhlg., 3 Wiederhlg., ...}

Die Zuordnungsvorschrift, die dieser Untersuchung zugrunde liegt, lautet:

"Ordne jedem $a \in A$ ein $y \in B$ so zu, daß y die mittlere Zahl der Wiederholungen zum Einprägen von a Silben richtig wiedergibt."

Das Ergebnis dieser Untersuchung führt zu folgender Paarmenge:

U = {(8 S.|2 W.), (16 S.|29 W.), (24 S.|43 W.), (36 S.|55 W.)}

Alle übrigen geordneten Paare (a|b) aus A×B erfüllen obige Bedingungen nicht. Z.B. ist das Paar (16 S.|10 W.) kein geordnetes Paar obiger Relation, da der Silbenzahl 16 nur eine mittlere Zahl von 10 Wiederholungen zugeordnet wird. Diese Zahl der Wiederholungen reicht aber nicht zum Einprägen der 16 Silben aus.

Beachte: Bei einer Relation werden den Elementen $a \in A$ nur solche Elemente $b \in B$ zugeordnet, die die Zuordnungsvorschrift erfüllen.

Beispiel: Schon 1925 untersuchte HURLOCK den Zusammenhang zwischen Leistungen und einem bestimmten Lehrerverhalten. Schülern einer Schulklasse wurden an fünf aufeinanderfolgenden Tagen Rechenleistungstests gegeben. Am jeweils nächsten Tag lobte der Lehrer ein Drittel der Schüler der Klasse einzeln wegen ihrer guten Leistungen, jeweils ein Drittel der [illegible] wurde getadelt und die Leistungen der übrigen Schüler wurden überhaupt nicht erwähnt. Lob, Tadel und Nichtbeachtung erfolgten unabhängig von den tatsächlichen Leistungen, lediglich aufgrund der vorherigen Einteilung der Klasse in drei Gruppen.

HURLOCK wollte also wissen, wie sich die verschiedenen Lehrerverhalten auf die Testleistungen der drei Schülergruppen nach 1 Tag (Test 1), nach 2 Tagen (Test 2), ... auswirkt. Die Leistung ergab sich aus der Zahl der richtigen Lösungen (kurz: rL) . Das Ergebnis der Untersuchung ist dann eine Relation zwischen der Menge A

A = {Test 1, Test 2, Test 3, Test 4, Test 5}

und der Menge B

[illegible]

An dieser Stelle wollen wir eine vereinfachte Schreibweise [illegible] Element von A und B sich zusammensetzt aus einer *Maßzahl* und der *Angabe der Bedeutung der Zahl* (Test ... oder ... richtige Lösungen). Die jeweilige Bedeutung der Zahl ist aber für alle Elemente von A oder B gleich. Deshalb schreibt man kürzer:

A (Test ...) = {1,2,3,4,5} und

B (... rL) = {1,2,3,...,30}

Das Ergebnis der Untersuchung für die "gelobte" Gruppe G_L, für die "getadelte" Gruppe G_T und die "nicht beachtete" Gruppe G_{nb} ist:

G_L(Test|rL) = {(1|12), (2|16), (3|19), (4|19), (5|20)}

G_T(Test|rL) = {(1|12), (2|16), (3|14), (4|13), (5|14)}

G_{nb}(Test|rL) = {(1|12), (2|14), (3|13), (4|13), (5|12)}

Versuchen Sie, dieses Ergebnis zu deuten. Welches Lehrerverhalten regt Schüler am wenigsten zu Mitarbeit an ?

Vergleicht man die geordneten Paare der drei Gruppen für jeweils den gleichen Testtag, so kann man folgendes feststellen:

Nach dem ersten Tadel stiegen die Leistungen der getadelten Schülergruppe ähnlich wie die der gelobten Schülergruppe. Nach weiteren Tadeln allerdings fiel die getadelte Gruppe immer weiter ab, im deutlichen Gegensatz zum weiteren Anstieg der Leistungen der gelobten Schülergruppe.

Die nicht beachtete Schülergruppe blieb in ihren Leistungen stets unterhalb der beiden Gruppen.

Manche von Ihnen werden obige Zusammenhänge nur schwer erkannt haben. Zum Teil ist dies auf die noch unübersichtliche Darstellung der Ergebnisse als Paarmenge zurückzuführen. Wir werden deshalb weitere aufzählende Darstellungen lernen, die *Wertetabelle* und das *Pfeildiagramm*.

WERTETABELLE:

Betrachten wir noch einmal die Ergebnisse der letzten Untersuchung:

G_L (Test|rL) = {(1|12),(2|16),(3|19),(4|19),(5|20)}

G_T (Test|rL) = {(1|12),(2|16),(3|14),(4|13),(5|14)}

G_{nb} (Test|rL) = {(1|12),(2|14),(3|13),(4|13),(5|12)}

Ordnet man die zugehörigen Elemente der Relation nicht nebeneinander, sondern untereinander an, so erhält man eine *Wertetabelle:*

Wertetabelle

G_L :	a(Test)	1	2	3	4	5
	b(rL)	12	16	19	19	20
G_T :	a(Test)	1	2	3	4	5
	b(rL)	12	16	14	13	14
G_{nb} :	a(Test)	1	2	3	4	5
	b(rL)	12	14	13	13	12

Beachte: Vereinbarungsgemäß sollen in der oberen Reihe einer Wertetabelle nur Elemente der zuerst genannten Menge (Test), in der unteren Reihe nur Elemente der zweiten Menge (Zahl der richtigen Lösungen) stehen. Zur besseren Übersicht werden deshalb die Platzhalter der ersten und zweiten Menge stets der Tabelle vorangestellt.

PFEILDIAGRAMM

Neben der Paarmengendarstellung und der Wertetabelle ist das *Pfeildiagramm* eine wichtige Darstellungsart von Beziehungen zwischen den Elementen zweier Mengen. Wichtig deshalb, weil die Zuordnung der Elemente *graphisch* dargestellt wird. Graphische Darstellungen sind häufig übersichtlicher als Tabellen. Das wollen wir an folgendem Beispiel zeigen:

Gegeben seien folgende Gruppen von Energieverbrauchern

A = {Haushalte, Verkehr, Kraftwerke, Industrie}

und folgende natürliche Energiequellen

B = {Kohle, Erdöl, Erdgas, Wasser, Wind, Uran}

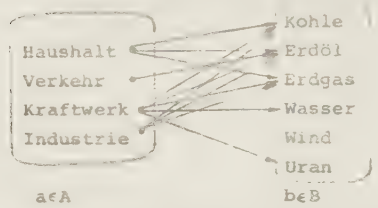
Gesucht ist die Beziehung zwischen den Energieverbrauchern a ∈ A und den von ihnen hauptsächlich benötigten Energiequellen b ∈ B in Deutschland. Diese Relation läßt sich als Wertetabelle darstellen:

Wertetabelle:

Haushalt	[illegible]	Haushalt	Verkehr	Kraftwerk	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	Erdgas	Erdöl	Kohle	[illegible]	

Kraftwerk	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
Erdgas	Wasser	[illegible]	[illegible]	Kohle	[illegible]	[illegible]

Im Pfeildiagramm erhält man ein übersichtlicheres Bild:



Beim *Pfeildiagramm* werden alle Elemente beider Mengen A und B graphisch dargestellt. Die in Beziehung stehenden Elemente von A und B werden durch Pfeile gekennzeichnet. Vereinbarungsgemäß beginnen die Pfeile bei den Elementen a der zuerst aufgeführten Menge A und enden auf den zugeordneten Elementen b ∈ B.

Weiteres Beispiel einer Relation zwischen zwei *Zahlmengen:*

Gegeben: A = {4, 6, 7, 10, 11, 12} und B = {3, 4, 5}

und die Vorschrift "x ist Vielfaches von y"

Wertetabelle und Pfeildiagramm

x	4	6	10	12	12
y	4	3	5	3	4

Beachte: **Während in Wertetabellen und Paarmengenschreibweise nur die Elemente von A und B dargestellt werden, die Elemente geordneter Paare der Relation sind, werden im Pfeildiagramm alle Elemente von A und B dargestellt. Man erkennt dadurch sofort, welche Elemente von A und B nicht Elemente geordneter Paare darstellen. (Im letzten Beispiel sind die Elemente 7 und 11 der Menge A keine Elemente geordneter Paare).**

BESCHREIBENDE PAARMENGENDARSTELLUNG:

Bisher haben wir die Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen fast ausschließlich in aufzählender Form als Paarmenge, Wertetabelle oder Pfeildiagramm dargestellt oder durch Angabe der beiden Mengen A und B und einer Zuordnungsvorschrift ("x ist Vielfaches von y") beschrieben. In der Mathematik, Physik und anderen Wissenschaften sind Zuordnungsvorschriften oft als *mathematischer Ausdruck* darstellbar. In diesem Fall kann man Relationen sehr kurz durch die *beschreibende Paarmengendarstellung* angeben.

Beispiel: **Die Relation sei bestimmt durch die Zahlmengen A = ℕ und B = ℕ und die Vorschrift " u ist kleiner als v."**

Führt man für den Begriff "kleiner " das Symbol < ein, so kann man obige Relation darstellen durch

$$P = \{(u \mid v) \mid u < v\}_{A \times B}$$

$$P = \{(u \mid v) \mid \ldots\}_{A \times B}$$

Statt A×B kann man in diesem Fall für A und B die Zahlmengen ℕ einsetzen

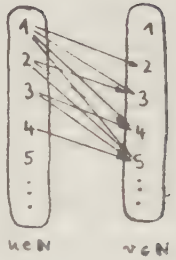
$$P = \{(u \mid v) \mid u < v\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$$

Lies: Die Relation ist eine Paarmenge aus der Grundmenge ℕ×ℕ , deren geordnete Paare (u|v) die Bedingung u < v erfüllen sollen.

Wertetabelle:

u	1	1	1	1	. .	2	2	2	. .	3	3	. .	. .
v	2	3	4	5	. .	3	4	5	. .	4	5	. .	. .

Pfeildiagramm:



Beachte: **Sowohl mit der Wertetabelle als auch mit dem Pfeildiagramm können nur Teilmengen der Relation dargestellt werden, da diese aus unendlich vielen geordneten Paaren der Produktmenge A×B besteht. Nur beschreibende Darstellungsarten sind in der Lage, auch solche Relationen mit unendlich vielen geordneten Paaren eindeutig festzulegen, die wegen ihrer großen Zahl der Elemente in aufzählender Form nicht mehr vollständig wiedergebbar sind.**

Bei dem nun folgenden Beispiel ist die Beziehung zwischen den Elementen zweier Mengen angenähert als Rechenausdruck angebbar.

Beispiel: In einem Klassenzimmer soll der Luftbedarf von Schülern bei normalem Unterricht bestimmt werden. Dadurch will man feststellen, durch welche baulichen Maßnahmen man Ermüdungserscheinungen von Schülern verhindern kann. Hierzu bestimmt man den Luftbedarf eines einzelnen Schülers:

Man stellte fest, daß ein Schüler im Mittel einen Luftbedarf von 10 Liter/min. hat.

Man kann die Vermutung anstellen, daß der Luftbedarf eines Schülers unabhängig davon ist, wieviele Schüler noch in der Klasse sind. Das würde aber bedeuten, daß n Schüler n mal mehr Luft verbrauchen als ein Schüler. Wenn diese Vermutung richtig ist, so müßte sich der Zusammenhang zwischen der Schülerzahl n und dem Luftbedarf b in Liter/min durch folgenden Rechenausdruck formulieren lassen:

$b = 10 \cdot n \quad (n \in \mathbb{N})$

$$P = \{(\text{Schülerzahl } n \mid \text{Luftbedarf } b \text{ in L/min}) \mid b = 10 \cdot n\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$$

Der Zusammenhang zwischen Schülerzahl $n \in \mathbb{N}$ und dem mittleren Luftbedarf $b \in \mathbb{Q}$ in L/min wird beschrieben durch den Rechenausdruck $b = 10 \cdot n$.

Um festzustellen, ob dieser Rechenausdruck den Luftbedarf von n Schülern richtig beschreibt, wurde der Luftbedarf b in L/min für folgende Schülerzahlen bestimmt:

n (Schülerzahl)	5	10	15	20	25
b (Luftverbrauch in L/min)	58	92	138	211	259

Aufgrund obigem Rechenausdrucks würde man aber folgende Wertetabelle erhalten:

n (Schülerzahl)	5	10	15	20	25
b (Luftverbrauch in L/min)	50	100	150	200	250

Beachte: Der berechnete Luftverbrauch aufgrund des Rechenausdrucks $b = 10 \cdot n$ ist nur angenähert gleich dem gemessenen Luftverbrauch von den n Schülern. Trotzdem ist man häufig sehr froh, einen Zusammenhang zwischen zwei Größen durch einen Rechenausdruck angenähert angeben zu können. Warum ?

Weil bei angenäherter Gültigkeit des Rechenausdrucks auch solchen Elementen $n \in D$ ein $b \in W$ angenähert zugeordnet werden kann, die nicht in der Untersuchung bestimmt wurden.
In unserem Beispiel könnte man den Luftbedarf b von 1 bis 5 Schülern annähernd berechnen, obwohl die Untersuchung selbst nur für einen und fünf Schüler durchgeführt wurde:

n (Schülerzahl)	1	2	3	4	5
b (Luftb. in L/...)	10	20	30	40	50

In Physik, Chemie und in vielen anderen Wissenschaften werden Rechenausdrücke zur Beschreibung von Zusammenhängen zwischen zwei Größen mit viel Erfolg eingesetzt, obwohl sie die tatsächlichen Verhältnisse stets nur angenähert beschreiben. Auch im täglichen Leben macht man hiervon Gebrauch. So wird jemand, der mit seinem VW im Urlaub ca. 3000 km fahren will, annähernd im Voraus berechnen können, wieviel Geld er für Benzin ausgeben muß. Bei einem durchschnittlichen Benzinverbrauch von etwa 10 L/100 km wird er etwa 300 Liter verbrauchen. Dafür wird er ungefähr 250 DM als Benzinkosten veranschlagen müssen. Man muß also nicht erst 3000 km fahren, um zu wissen, wieviel Geld man ungefähr für Benzin ausgeben muß.

ZUSAMMENFASSUNG

Damit wollen wir das Kapitel der allgemeinen Relation und ihre verschiedenen Darstellungen nun abschließen. Bevor wir uns speziellen Relationen, Funktionen genannt, zuwenden, soll noch einmal die wichtigsten Inhalte der vergangenen Kapitel wiederholt werden:

1. Eine Relation zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge von geordneten Paaren (a|b) aus $A \times B$, wobei bestimmten Elementen $a \in A$ Elemente $b \in B$ aufgrund einer Vorschrift zugeordnet werden. Dabei können folgende Fälle auftreten:

   a. Nicht alle Elemente a der Menge A sind Elemente eines geordneten Paares:

   b. Nicht alle Elemente b der Menge B sind Elemente eines geordneten Paares:

   c. Einem Element $a \in A$ können mehrere $b \in B$ zugeordnet werden:

   d. Mehreren Elementen $a \in A$ ist nur ein Element $b \in B$ zugeordnet:

2. Darstellung von Relationen.
   Wir unterscheiden die aufzählende und beschreibende Darstellung:

   a. Aufzählende Darstellungen sind solche, bei denen die Elemente der geordneten Paare einer Relation aus der Darstellung direkt entnommen werden können. Wir haben die *Paarmengenschreibweise*, *Wertetabelle* und das *Pfeildiagramm* kennengelernt:

   Paarmengenschreibweise: $P: \{(E\ 1 | 100\ km/h), (E\ 5 | 120\ km/h), (E\ 9 | 140\ km/h)\}$

   Wertetabelle: f:

n (Schülerzahl)	5	10	15	20	25
b (Luftverbrauch L/min)	50	100	150	200	250

   Pfeildiagramm:

   Beachte: Aufzählende Darstellungen sind dort möglich, wo die zugeordneten Elemente von Paaren der Relation bekannt sind. In der Regel können nur Teilmengen geordneter Paare einer Relation dargestellt werden.

b. **Beschreibende Darstellungen und solche, bei denen die Grundmenge $A \times B$ der Relation und eine Vorschrift angegeben ist, mit derem Hilfe man alle geordneten Paare der Relations bestimmen kann. Eine beschreibende Darstellung kann stets in eine aufzählende Darstellung überführt werden. Wir haben die *wörtliche Darstellung* und die *beschreibende Paarmengendarstellung* kennengelernt:**

wörtliche Darstellung:

gegeben $A = \{ \square, \triangle, \triangleright, \bigcirc \}$

$B = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

und die Vorschrift: "Ordne jedem $x \in A$ ein $y \in B$ so zu, daß y die Zahl der Ecken von x angibt."

beschreibende Paarmengendarstellung:

$$P = \{ (\text{Schülerzahl } n \mid \text{Luftbedarf } b \doteq L/\text{min}) \mid b = 10 \cdot n \}$$

Die beschreibende Paarmengendarstellung kann nur dort angewandt werden, wo es sich um eine Relation zwischen zwei Zahlmengen A und B handelt, deren Zuordnungsvorschrift als Rechenausdruck angebbar ist.

4. FUNKTION

In den nun folgenden Kapiteln wollen wir uns nur noch mit einem speziellen Typ einer Relation, *Funktion* genannt, beschäftigen, der weit über die Mathematik hinaus von großer Bedeutung ist. Wichtigstes Merkmal einer Funktion ist der eindeutige Zusammenhang zwischen den Elementen $a \in A$ und den zugeordneten $b \in B$.

Eine *Funktion f* ist eine spezielle Relation, bei der [illegible] Element $a \in A$ *genau ein* $b \in B$ zugeordnet ist. *Funktion f*

[illegible] schlossen, bei denen einem Element $a \in A$ mehr als ein $b \in B$ oder *gar kein* Element $b \in B$ zugeordnet [illegible]

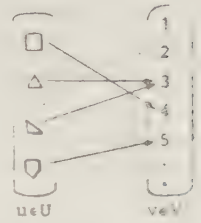
[illegible] Funktion so bedeutsam ?
Betrachten wir hierzu einmal die Zuordnung von Verkehrszeichen zu ihrer Bedeutung:

Im Straßenverkehr ist es unbedingt notwendig, daß jedem Verkehrszeichen eindeutig eine bestimmte Bedeutung zukommt. Z.B. darf einer roten Ampel nicht gleichzeitig die Bedeutung "halten" und "fahren" zukommen. Lange Zeit kam es in Deutschland an Kreuzungen mit Kreisverkehr zu Unfällen zwischen Deutschen und Ausländern, da bei uns das Zeichen für Kreisverkehr "halten", in vielen Ländern dieses Schild [illegible] Bedeutung "[illegible]" hat.
Umgekehrt sollte ausgeschlossen sein, daß aufgestellten Verkehrsschildern gar keine Bedeutung

zugeordnet werden kann.
Man verlangt also, daß jedem Element a (Verkehrsschilder) eindeutig ein Element b (Bedeutung) zugeordnet ist. Dieser Unterschied zwischen Relation und Funktion läßt sich im Pfeildiagramm anschaulich darstellen:

Beispiel einer Funktion f:

"Ordne jedem $u \in U$ (Figur) ein $v \in V$ so zu, daß v die Zahl der Ecken der Figur wiedergibt."



Beachte: Von jedem $u \in U$ geht genau ein Pfeil aus, so daß jeder Figur eindeutig eine bestimmte Eckenzahl zugeordnet werden kann.

Die folgenden Beispiele stellen keine Funktionen dar.

a. "Ordne jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $y \in \mathbb{N}$ so zu, daß gilt:

$x + y = 4$

Beachte: Diese Relation ist keine Funktion, da nicht jedem $x \in \mathbb{N}$ ein $y \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden kann.

[illegible]

man statt $A = \mathbb{N}$ $A = \{1, 2, 3\}$ annimmt!

b. "Ordne jedem $s \in A$ ein $t \in B$ so zu, daß gilt: $s < t$

Beachte: Diese Relation ist keine Funktion, da dem Element $s = 1$ mehr als ein $t \in B$ zu[illegible]

[illegible] den Begriff *Abbildung*. Zur Darstellung der speziellen Relation "Funktion" können wir die früher gelernten aufzählenden und beschreibenden Darstellungsweisen für Relationen anwenden.
Bei Funktionen sind einige neue Sprech- und Schreibweisen üblich, die wir kurz einüben wollen:

a. Eine Funktion wird häufig durch einen *Kleinbuchstaben* bezeichnet. Allerdings ist diese Schreibweise nicht [illegible] ebenfalls eine Funktion kennzeichnen: g, h, F, G, φ, ϑ, ...

b. Die Menge der Elemente, denen aufgrund einer Zuordnungsvorschrift ein $y \in B$ zugeordnet werden kann, nennt man *Argumentmenge* oder *Definitionsbereich D* der Funktion. Man sagt: Die Funktion ist nur erklärt (definiert) bezüglich der Elemente der Menge D.

Argumentmenge
Definitionsbereich D

c. Die Menge aller Elemente $y \in B$, die den Elementen des Definitionsbereichs D der Funktion zugeordnet werden, nennt man den *Wertebereich W* oder *Bildmenge* der Funktion.

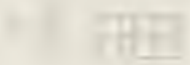
Wertebereich
Bildmenge

Erläuterung der Begriffe Definitions- und Wertebereich:

Gegeben sei folgende Relation bezüglich $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$

$P = \{(x|y) \mid x+y=4\}$

Wertetabelle:



Pfeildiagramm:

$A = \mathbb{N}$ $B = \mathbb{N}$

Der Definitionsbereich D der obigen Relation ist eine Teilmenge von A, da nur den Elementen 1,2,3 ein $y \in B$ zugeordnet werden kann: also $D = \{1,2,3\}$

Wie schon festgestellt, wird obige Relation zur Funktion, wenn man schreibt

$f = \{(x,y) \mid x+y=4\}_{D \to W}$ für $D = \{1,2,3\}$

Der Wertebereich W enthält nur die Elemente von B, die Elemente von geordneten Paaren darstellen: also $W = \{1,2,3\}$

Gegeben sei folgende weitere Funktion f. "Ordne jedem Element $x \in D$ (Figur) einen Formelausdruck $y \in B$ so zu, daß die Fläche der Figur richtig wiedergibt."

Pfeildiagramm:

Wertetabelle:

Der *Definitionsbereich D* der Funktion ist die Menge $D = \{\square, \triangle, \triangleright, \square\}$

Der *Wertebereich W* der Funktion ist dagegen nur eine Teilmenge von B. W enthält alle Elemente $y \in B$, die Elemente von geordneten Paaren von f darstellen:

$W = \{a^2, a \cdot b, \frac{a \cdot b}{2}\}$

Unsere bisherigen Überlegungen bezogen sich auf sehr unterschiedliche Objekte (Figuren, Zahlen, Formeln, meßbare Größen, Begriffe, ...). Im folgenden wollen wir uns nur noch mit solchen Funktionen beschäftigen, bei denen den *Zahlenwerten x* einer Größe *Zahlenwerte y* einer zweiten Größe zugeordnet werden. Solche Abbildungen von einer Zahlenmenge A auf eine zweite Zahlenmenge B werden als *reelle Funktionen* bezeichnet. Für diese werden wir nun zwei weitere, wichtige Darstellungen lernen; die *graphische* Darstellung im *Koordinatensystem* und das *vereinfachte Pfeildiagramm*.

reelle Funktionen

Sicher werden Sie langsam denken: Wozu soll man soviele verschiedene Darstellungsformen, Begriffe für dieselbe Sache lernen? Warum genügt nicht eine Darstellungsform?

Hierzu folgendes Beispiel: Wenn ein Eingeborener aus dem Dschungel in unsere Großstädte kommt, so würde er sich sicher fragen: Wozu brauch man soviele verschiedene Fortbewegungsmittel? Warum genügt nicht eins?

Wir würden ihm vielleicht erklären, daß jedes Fortbewegungsmittel in einer bestimmten Situation sinnvoll benutzt wird, wo andere nicht sonderlich geeignet sind. Damit hätte man ihm die Vielfalt begründet. Verstehen wird er dies aber erst, wenn er selbst seine Erfahrungen mit den verschiedenen Fahrzeugen gemacht hat.

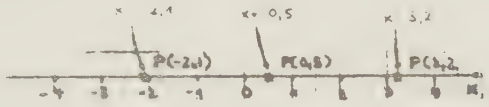
Ähnlich ist Ihre Situation. Sie sollen ohne eigene Erfahrungen, durch die die verschiedenen Darstellungsformen verständlich würden, diese lernen. Das finde ich auch nicht gut. Aber Erfahrungen kosten Zeit, die in den Unterrichtsplänen nicht vorgesehen ist.

Deshalb lernen wir nun zwei weitere Darstellungsformen die ich für sehr wichtig halte. Einfach so.

4.1 KOORDINATENSYSTEM

Das *Koordinatensystem* ist ein Hilfsmittel zur graphischen Darstellung von geordneten Zahlenpaaren. Sie haben sicher früher die *Zahlengerade* als Hilfsmittel zur Darstellung der *Menge der rationalen Zahlen* kennengelernt. Dabei wurde jedem $x \in Q$ *eindeutig ein Punkt P (x) auf der Zahlengeraden zugeordnet:*

Zahlengerade



Zahlengerade

Eine reelle Funktion stellt aber eine Zuordnung von Elementen zweier Zahlenmengen dar, so daß wir für eine Darstellung der Elemente beider Mengen D und W jeweils eine Zahlengerade benötigen:

Darstellung zweier Zahlmengen auf zwei Zahlgeraden.

Schon um 1600 kam der Mathematiker R.DESCARTES auf den Gedanken, die Zahlengeraden für D und W *senkrecht* zueinander anzuordnen.

Dabei ist es heute üblich:

1. Die Elemente $x \in D$ auf der waagrechten Achse, *Abszisse* genannt, die Elemente $y \in W$ auf der senkrechten Achse, *Ordinate* genannt, darzustellen.

   Abszisse (x)

   Ordinate (y)

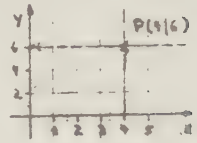
2. Die Achsen werden mit den Symbolen der Elemente (x und y) von D und W gekennzeichnet.
3. Die *Nullpunkte beider Zahlengeraden* werden häufig aufeinander gelegt und bilden den *Ursprung* des Koordinatensystems.

   Ursprung

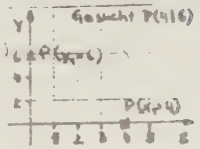
4. Die *positive Zählrichtung* der Achsen wird mit einem Pfeil gekennzeichnet.
5. Wenn es die Aufgabenstellung zuläßt, werden die *Einheiten* auf den Achsen gleich gewählt.

Damit haben wir aber erst die Möglichkeit, die Elemente zweier Zahlmengen als Punkte auf den entsprechenden Achsen darzustellen. Zur Darstellung von geordneten Paaren kommen wir, wenn wir folgende Vorschrift anwenden:

Ist das *Bild* eines bestimmten geordenten Paares $(x_1|y_1)$ gesucht (z.B. $(x_1|y_1)=(4|6)$), so suche man zuerst die Punkte $P(x_1)$ und $P(y_1)$ auf den zugehörigen Achsen.



Zeichne dann durch beide Punkte Parallelen zu jeweils eine der beiden Achsen. Der *Schnittpunkt* beider Parallelen wird als *Bildpunkt* $P(x_1|y_1)$ *des Paares* $(x_1|y_1)$ bezeichnet.



Bildpunkt P(x₁|y₁)

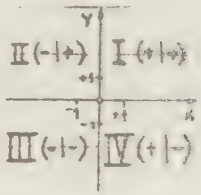
Durch diese Vorschrift kann jedem geordneten Paar *eindeutig* ein Punkt zugeordnet werden. Umgekehrt kann aber auch jedem Punkt *eindeutig* ein geordnetes Paar von zwei Zahlen zugeordnet werden.

Die Werte x_1 und y_1 werden als *Koordinaten* des Punktes $P(x_1|y_1)$ bezeichnet.

Wichtig ist noch, daß die Achsen des Koordinatensystems die Zeichenebene in 4 Teile, im sogenannten *Quadranten* zerlegt.

Quadranten

Dabei liegen im I.Quadranten, nur Punkte, deren Koordinaten *positiv* sind, im III, Quadranten nur Punkte, deren Koordinaten *negativ* sind.
Im II. und IV. Quadranten ist jeweils eine Koordinaten eines Punktes *positiv*, eine *negativ*.



Die Numerierung der Quadranten erfolgt gegen den Uhrzeigersinn!

---

* Ein Platzhalter wird mit einem Index versehen, wenn man ein bestimmtes, zahlenmäßig aber noch nicht festgelegtes Element darstellen will.

Damit haben wir das Hilfsmittel *Koordinatensystem* zur Darstellung geordneter Paare einer Funktion kennengelernt. Nun müssen wir noch lernen, wie man es benutzt.

Dazu betrachten wir folgende Beispiele:

B 1: Menschenlawine

Der geschätzte Zusammenhang zwischen der Jahreszahl n und der Erdbevölkerung M ist für vier verschiedene Jahre in der folgenden Wertetabelle dargestellt.

n = Jahreszahl	M = Bevölkerung
[illegible]	[illegible]

(n = -2500 bedeutet: 2500 v. Chr.)

Graph der Funktion T

B 2: Todesrate

In einer statistischen Untersuchung über den Zusammenhang zwischen der Fahrgeschwindigkeit v und der Todesrate x der Insassen bei Verkehrsunfällen wurde folgender Zusammenhang bestimmt.

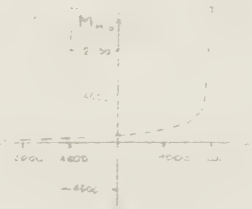
v	x
[illegible]	[illegible]

Graph der Funktion G

Wie Sie sehen, haben wir bei den vorliegenden Beispielen keine symmetrischen *Achsenkreuze* gezeichnet, sondern im Wesentlichen nur den *Ausschnitt*, in dem die Punkte der Funktionen liegen.
Im Beispiel B 2 sind die beiden *Maßstäbe* der Achsen nicht gleich.

Das bedeutet für uns also: Bevor wir eine Funktion graphisch in einem Koordinatensystem darstellen können, muß man vorher eine Entscheidung treffen, welchen *Ausschnitt* und welchen *Maßstab* man am besten verwendet. Hierfür gibt es kein eindeutiges Rezept. Die Vorgehensweise ist deshalb schwer zu vermitteln. Wer aber häufig gezwungen ist, Funktionen zu zeichnen, wird schnell dahinterkommen, wie man es macht. Wir beginnen mit der Wahl des Ausschnitts.

WAHL DES AUSSCHNITTS



Betrachten wir noch einmal das Beispiel B 1. Angenommen, wir hätten nicht die Möglichkeit der Ausschnittwahl gehabt, so hätten wir die Funktion in einem symmetrischen y - Koordinatensystem dargestellt (s. Abb. rechts).

Wir sehen, daß im III. und IV. Quadranten keine Punkte der Funktion T liegen. Für die Darstellung der Funktion würde es also völlig genügen, die n-Achse im Bereich n = -2500 bis n = 1960 darzustellen (kurz: $n \in [-2500; 1960]$) und die M-Achse für den Bereich $M \in [40; 3000]$ zu zeichnen.

Der Übersicht halber erweitert man den Ausschnitt so, daß der Ursprung des Koordinatensystems miteinbezogen wird. Auf diese Weise gelangt man zum Ausschnitt in B 1, der wesentlich weniger Platz bei entsprechendem Maßstab benötigt als das symmetrische Achsenkreuz!

Wie kann man nun anhand der Wertetabelle einer Funktion entscheiden, welchen Ausschnitt man wählt?

Hierzu folgendes Verfahren:

1. Man überschreibt sich den darzustellenden Bereich für $n \in D$ und $M \in W$ hin:

   Für B 1 gilt: $n \in [-2500; 1960]$ und $M \in [40; 3000]$

   Mit etwas Übung erkennt man, daß alle Punkte der Funktion negative oder positive n-Koordinaten und positive M-Koordinaten haben. Demnach müssen alle Punkte der Funktion im I. und II. Quadranten liegen, da nur dort solche Punkte mit negativen/positiven n- und positiven M-Koordinaten liegen können.

   Aus Gründen der Übersicht soll der Ursprung des Koordinatensystems (Nullpunkt) im Ausschnitt enthalten sein.

2. Wir untersuchen die Bereiche für D und W, ob sie den Nullpunkt jeder Achse enthalten:
   Für den n-Bereich [-2500; 1960] trifft dies zu. Dagegen muß der M-Bereich [40; 3000] erweitert werden, da er die Null nicht enthält. Man kommt zu dem darzustellenden M-Bereich [0; 3000].

   Deshalb wurde folgender Ausschnitt bei B 1 gewählt:

   Für die n-Achse: [-2500; 1960] für die M-Achse: [0;3000]

Für Beispiel B 2 läuft das Verfahren analog:

Bereich: D = [50; 140] und W = [6,5;40]

Beide Bereiche enthalten nicht die Null. Deshalb erweitern wir sie auf

[0; 140] für die v-Achse und [0; 40] für die k-Achse.

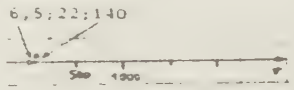
Wir brauchen also nur diesen Ausschnitt zur Darstellung der Funktion in B 2 zeichnen.

Beachte: Die Wahl des Ausschnitts hat den Zweck, den Teil des Koordinatensystems weglassen zu können, in dem sich keine Punkte des Graphens einer Funktion befanden!

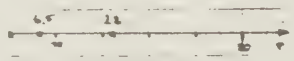
WAHL DER MASSSTÄBE BEIDER ACHSEN

Schon bei der Darstellung von Zahlen als Punkte auf einer Zahlengerade war es notwendig, den Maßstab der Zahlengerade den darzustellenden Zahlenwerten anzupassen. Wählt man den Maßstab zu klein, so kann man die zugehörigen Punkte der Zahlenwerte nicht mehr gut darstellen, wählt man den Maßstab zu groß, so wird die Darstellung unverhältnismäßig groß.
Das wollen wir am folgenden Beispiel uns klarmachen:

Darzustellen seien die Zahlen 6,5;22;140



Maßstab zu klein: 500 Einheiten entsprechen 1 cm.
Punkte können nicht genau eingezeichnet werden!



Maßstab zu groß: 10 Einheiten entsprechen 1 cm.
P(140) liegt nicht mehr auf der Achse
Um den Maßstab zu bestimmen, muß man demnach die *Zeichenbarkeit der Punkte* und *die Größe der Darstellung* berücksichtigen.

Die Größe der Darstellung hängt normalerweise von dem zur Verfügung stehenden Millimeterpapier ab. Allerdings wählt man häufig viel kleinere Darstellungen, da der Aufwand im Verhältnis zum Zweck der Darstellung stehen sollte. Und für den Zweck der Veranschaulichung einer Funktion durch den Graphen genügt oft eine relativ kleine Darstellung. In diesem Lehrtext wurde für solche Abbildungen ein Platz von 5 cm x 5 cm vorgesehen.

Wenn wir also die Größe der Darstellung mit 5 cm x 5 cm als vorgegeben betrachten wollen, ist *der Maßstab nur noch durch die Zeichenbarkeit der Punkte bestimmt.*

Wir wollen diese Aussage am Beispiel B 2 erläutern:

Wertetabelle der Funktion G

v (Geschw. in km/h)	50	100	140
k (Todesrate in %)	6,5	22	40

Daraus ergibt sich für den Definitionsbereich D=[50;140]
für den Wertebereich W=[6,5 ; 40]

Aufgrund der Überlegungen über den darzustellenden Ausschnitt kamen wir zu den Bereichen

[0; 140] für die v-Achse und [0; 40] für die k-Achse.

Diesen Bereich wollen wir nun möglichst günstig auf einer Achse von jeweils 5 cm Länge darstellen, da unsere Abbildung in beiden Richtungen nicht größer als 5 cm werden soll.

Verfahren zur Bestimmung des Maßstabes für die v-Achse:

1. Schritt: Wir betrachten den darzustellenden Ausschnitt [0; 140] für die v-Achse. Er erstreckt sich über 140 Einheiten (kurz: 140 E.). Man berechnet die Zahl der darzustellenden E. aus der Differenz vom größten Zahlenwert für v (140) des Bereiches und kleinstem Zahlenwert für v (0) des Bereiches.
   Also: 140 - 0 = 140 E.

   Bei 5 cm Achsenlänge entspricht das einem Maßstab für die v-Achse von

   $\frac{140}{5}$ E/cm = 28 E/cm (Lies: 28 Einheiten pro cm)

   Dieser Maßstab würde bei gegebener Länge von 5 cm den Platz am günstigsten ausnutzen. Er hat nur einen Nachteil. Er ist *unpraktisch!* Die Werte v_1 = 50 und v_2 = 100 sind nur mit großer Unsicherheit darstellbar. Versuchen Sie es einmal!

4. Schritt: Aus dem berechneten günstigsten Maßstab bestimmt man den *praktischen Maßstab* nach folgenden Überlegungen.
Man prüft den berechneten Maßstab auf gute Teilbarkeit. Im obigen Beispiel erhielten wir durch Rechnung 28 E. pro cm. Dieser Maßstab ist, wie wir gesehen haben, unpraktisch. Besser ist ein verkleinerter Maßstab von 50 E/cm oder ein vergrößerter Maßstab von 10 E/cm. In diesen Maßstäben lassen sich die v-Werte 50 und 100 gut darstellen. Da bei größerem Maßstab die Abbildung größer als 5 cm x 5 cm würde, haben wir in B 2 den Maßstab 50 E/cm gewählt.

Beachte: In der Regel sind die Maßstäbe 1 E/cm, 2E/cm, 4 E/cm, 5 E/cm und 1o E/cm gut teilbar(praktisch). Ebenfalls das 1ofache, 1oofache dieser Maßstäbe: oder der 1ote Teil, 1oote Teil, 1ooote Teil.
Also: o,o1 E/cm, o,o2 E/cm,...,2o E/cm, 4o E/cm, 5o E/cm, 1oo E/cm,...

[illegible] sich von diesen Überlegungen nicht zu sehr ver[illegible]. Sie klingen sehr kompliziert, werden aber nach [illegible] Übung einsichtig und selbstverständlich.

[illegible] stellten Funktion G verläuft genauso:

[illegible]mmung des Wertebereichs: W = [6,5;40]

[illegible] enthalten? nein! → [illegible]

[illegible] (berechnet): (40 - 0) / 5 = 8 E/cm

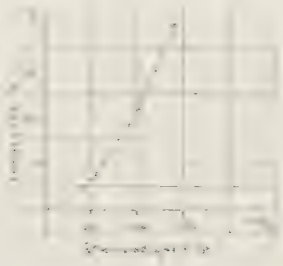
[illegible] praktisch? nein! → 10 E/cm

[illegible] folgt ein Maßstab von 10E/cm für die k-Achse in [illegible] B 2.

[illegible] dieser Überlegungen [illegible] wir im Beispiel 2 der [illegible]

[illegible]	[illegible]schw. in km/h)	[illegible]
[illegible]	(Todesrate in %)	[illegible]

zu dem nebenstehenden Graphen mit dem entsprechenden Ausschnitt und den Maßstäben für die v- und k-Achse.



4.2 ANALYTISCHE DARSTELLUNG (VEREINFACHTES PFEILDIAGRAMM)

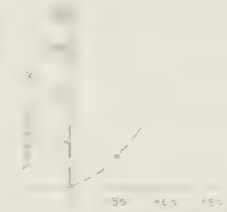
Für die Darstellung von funktionalen Zusammenhängen zwischen zwei zahlenmäßig beschreibbaren Größen haben wir verschiedene *aufzählende* und *beschreibende* Formen kennengelernt.

Als wichtige aufzählende Darstellungen kennen Sie schon die *Wertetabelle* und die graphische Darstellung im *Koordinatensystem*.

[illegible]

Wertetabelle

Graph



Als beschreibende Darstellungen haben wir die *wörtliche Darstellung* und die *beschreibende Paarmengendarstellung* kennengelernt.

Wörtliche Beschreibung: "Zur Funktion F sollen alle geordneten Paare (u|v) aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gehören, deren Summe 4 ergibt."

Paarmengenschreibweise: $F = \{(u|v) \mid u + v = 4\}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$

Weiterhin haben wir festgestellt, daß eine beschreibende Darstellung immer in eine aufzählende Form umgewandelt werden [illegible]

$= \{(u|v) \mid u + v = 4\}_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \longrightarrow F:$ [illegible]

Nun werden wir als weitere Darstellung funktionaler Zusammenhänge das vereinfachte Pfeildiagramm kennenlernen.

Betrachten wir hierzu folgendes Beispiel:
Der Sicherheitsabstand s, der im Straßenverkehr eingehalten werden muß, ist abhängig von der Fahrgeschwindigkeit v.
Für trockene Straße und bei normaler Sicht gibt es eine Faustregel, die jeder Geschwindigkeit v im Bereich von 0 bis 150 km/h eindeutig einen bestimmten Sicherheitsabstand s zuordnet.

Dieser Sachverhalt läßt sich im *vereinfachten Pfeildiagramm* folgendermaßen ausdrücken:

$$f: v \to s, \quad v \in D$$

Lies: Die Funktion f ordnet jedem Geschwindigkeitswert $v \in D$ eindeutig einen Wert s als Sicherheitsabstand zu.

Der Zahlenwert für s hängt ab von dem jeweiligen Geschwindigkeitswert v und der Art der eindeutigen Zuordnungsvorschrift, die den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und Sicherheitsabstand s beschreibt. Man kann dies symbolisch durch die Schreibweise

$$s = f(v)$$

s = f(v)

darstellen. Das Zeichen f( ) steht dabei als Platzhalter für eine eindeutige Zuordnungsvorschrift.
Im obigen Beispiel über den Zusammenhang von Geschwindigkeit v und Sicherheitsabstand s läßt sich diese Zuordnungsvorschrift als *Rechenausdruck* darstellen. Allerdings muß aus dem Rechenausdruck hervorgehen, welche Bedeutung die Zahlenwerte für v und s haben. Im vorliegenden Beispiel ist v in km/h und s in m angegeben:

$$s(\text{in m}) = \frac{v^2(\text{in km/h})}{100}, \qquad v \in D$$

oder kürzer

$$s_m = \frac{v^2_{km/h}}{100}, \qquad v \in D$$

Solche Funktionen, bei denen die Zuordnungsvorschrift f( ) als Rechenausdruck angebbar ist, nennt man *analytische Funktionen*.

analytische Funktion

Das vereinfachte Pfeildiagramm einer analytischen Funktion, in dem jedem Argument $x \in D$ ein y-Wert aufgrund eines Rechenausdrucks zugeordnet ist, nennt man eine *analytische Darstellung*:

analytische Darstellung

Beispiel: $f: v_{km/h} \rightarrow s_m = \frac{v^2_{km/h}}{100}, \quad v \in D$

Lies: Jedem Geschwindigkeitswert $v_{km/h} \in D$ ist ein Sicherheitsabstand s_m zugeordnet, der durch die Gleichung $s_m = v^2_{km/h} / 100$ eindeutig bestimmt ist.

Die Gleichung, nach der die Elemente $y \in W$ der Funktion bestimmt werden, nennt man *Funktionsgleichung*.

Funktionsgleichung

Will man nun wissen, welchen Sicherheitsabstand s_m man bei einer Geschwindigkeit $v_{km/h} = 5$ einhalten sollte, so setzt man diesen v-Wert in die Funktionsgleichung für s_m ein. Die Funktionsgleichung, die den Zusammenhang zwischen v und s beschreibt, war:

$$s_m = \frac{v^2_{km/h}}{100} \qquad \text{mit } D = [0;\ 150]_{G \in \mathbb{Q}}$$

Für $v_{km/h} = 5$ ist der angehörige s_m-Wert

$$s_m = \frac{(5)^2}{100} = \frac{25}{100} = 0{,}25$$

Damit haben wir ein geordnetes Paar (5|0,25) der Funktion f bestimmt.
Für $v_{km/h} = 100$ ist $s_m = 10.000 / 100 = 100$. Ein weiteres Paar von f ist also (100|100). Auf diese Weise können wir für alle Geschwindigkeitswerte $v \in D$, für die obiger Zusam-

menhang gültig ist, den zugehörigen Sicherheitsabstand s bestimmen. Wir erhalten eine Wertetabelle der Funktion:

f:

$v_{km/h}$	0	...	50	...	100	...	150
s_m	0	...	25	...	100	...	225

Diese Wertetabelle stellt nur eine willkürliche Teilmenge aller geordneten Paare der Funktion $f: v \rightarrow s$ dar. Da der Geschwindigkeitswert $v_{km/h}$ jede rationale Zahl im Bereich [0; 150] annehmen kann, entspricht der Funktion f eine *unendliche* Menge von Paaren. Dann aber kann man auf die Frage nach der Wertetabelle einer analytischen Funktion keine eindeutige Antwort geben. Es ist nicht möglich (und auch nicht sinnvoll!), alle geordneten Paare solcher Funktionen darzustellen. Wir müssen uns deshalb um sinnvolle Auswahlkriterien für die Bestimmung der x-Werte (Argumente) bemühen, die wir in die Wertetabelle aufnehmen wollen. Hierzu bedenken wir, daß Wertetabellen stets mit einem *bestimmten Ziel* aufgestellt werden. Solche Ziele können sehr verschieden sein und führen zu unterschiedlichen Teilmengen von geordneten Paaren, die in der Wertetabelle dargestellt werden. Dies wollen wir am Beispiel obigen funktionalen Zusammenhangs $f: v \rightarrow s$ erläutern:

1. Ein Ziel könnte sein, für spezielle v-Werte den Sicherheitsabstand s zu bestimmen; z.B. für die v-Werte 70 und 135. In diesem Fall müßte die Wertetabelle nur geordnete Paare zu diesen v-Werten enthalten:

   f:

$v_{km/h}$	70	135
s_m	49	18,25

2. Ein anderes Ziel ist es, sich für den Teilbereich $v_{km/h} \in [50;150]_{\mathbb{Q}}$ des Definitionsbereiches D einen Überblick über die Funktionswerte s_m zu verschaffen. Dann wäre es sinnvoll, nur v-Werte aus dem Bereich $[50;\ 150]_{\mathbb{Q}}$ in die Wertetabelle aufzunehmen. Die Darstellung aller geordneten Paare dieses Bereiches ist aber nicht möglich, da diesem Bereich unendlich viele geordnete Paare (v|s) entsprechen. In einem solchen Fall begnügt man sich mit v-Werten, die im regelmäßigen Abstand aus dem Bereich $[50;\ 150]_{\mathbb{Q}}$ entnommen werden. Man kommt dann z.B. zu folgender Wertetabelle:

   f:

$v_{km/h}$	50	70	90	110	130	150
s_m	25	49	81	121	169	225

   oder, wenn man den Abstand zwischen den v-Werten geringer wählt:

   f:

$v_{km/h}$	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
s_m	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

   Im zweiten Fall ist der Rechenaufwand doppelt so hoch, so daß man sich fragen muß, ob dieser Aufwand gerechtfertigt ist.

Aufgrund der 1. Tabelle kann man schon sagen, daß der Sicherheitsabstand für den vorgegebenen Geschwindigkeitsbereich $v_{km/h} \in [50;\ 150]_{\mathbb{Q}}$ im Bereich $s_m \in [25;\ 225]$ liegt, und daß mit wachsender Geschwindigkeit der Abstand ständig größer werden muß.
Die ausführlichere 2. Tabelle bringt im wesentlichen nichts Neues. Zum Zwecke des Überblicks über eine Funktion reicht also Tabelle 1 vollkommen aus!

Beachte: Wenn nicht ausdrücklich notwendig, sollte man bei Wertetabellen solche Argumentwerte x auswählen, für die die Berechnung der zugehörigen Funktionswerte y möglichst einfach ist. Im obigen Beispiel wurden deshalb nur solche v-Werte in die Wertetabelle aufgenommen, deren Quadrate sich gut berechnen ließen!

Eine Wertetabelle wird häufig auch zum Zwecke der graphischen Darstellung einer analytischen Funktion aufgestellt. Graphische Darstellungen sind wesentlich übersichtlicher als Tabellen oder analytische Darstellungen von Funktionen. Sie setzen aber die Kenntnis von geordneten Paaren der Funktion voraus.
Am Beispiel der obigen Funktion f: v→s wollen wir nun zeigen, welche prinzipiellen Überlegungen bei der Aufstellung von Wertetabellen zur graphischen Darstellung einer analytischen Funktion angestellt werden müssen.

Problem: Im Geschwindigkeitsbereich $v_{km/h} \in [0;\ 150]_{\mathbb{Q}}$ soll die Funktion

$$f:\ v_{km/h} \to s_m = \frac{v_{km/h}^2}{100}, \qquad v \in D$$

graphisch dargestellt werden.

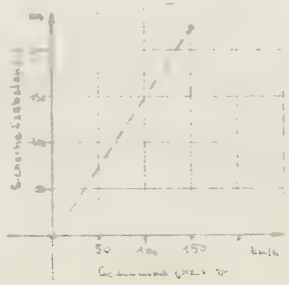
Verfahren: Man beginnt mit der Bestimmung der geordneten Paare von f, die den Bereichsgrenzen entsprechen, und stellt diese graphisch dar.

In obigem Beispiel werden die geordneten Paare für $v_{km/h} = 0$ und $v_{km/h} = 150$ bestimmt:

f:

$v_{km/h}$	0	150
s_m	0	225

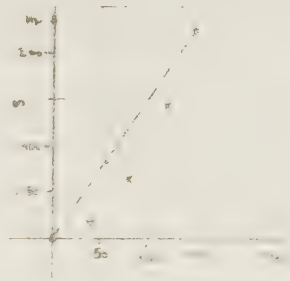
Man stellt nun eine Hypothese auf, wo die übrigen Punkte von f liegen. Im [illegible] Fall könnte man annehmen, daß alle Punkte auf einer Geraden durch die Punkte (0|0) und (150|225) liegen.



Zur Überprüfung der Hypothese bestimmen wir für weitere v-Werte aus $[0;150]$ die zugehörigen s-Werte; z.B. v = 40, v = 80, v = 120.

f:

$v_{km/h}$	0	150	40	80	120
s_m	0	225	16	64	144



Durch Einzeichnen der Punkte stellen wir fest, daß obige Hypothese falsch war. Die Punkte der Funktion f: v→s liegen nicht auf einer Geraden, da erhebliche Abweichungen sichtbar sind.

Wir könnten nun vermuten, daß die Punkte der Funktion vielleicht auf einer glatten Kurve liegen, die die bisher eingezeichneten Punkte verbindet.

Durch weitere geordnete Paare versucht man, diese Hypothese zu bestätigen, z.B. durch v = 20 und v = 100.

f:

$v_{km/h}$	0	150	40	80	120	20	100
s_m	0	225	16	64	144	4	100

Man erkennt, daß die neu hinzukommenden Punkte den angenommenen Kurvenverlauf sehr gut bestätigen.

Damit haben wir mit ausreichender Sicherehit den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit v und dem Sicherheitsabstand s im Bereich von 0 km/h bis 150 km/h für $v_{km/h} \in \mathbb{Q}$ bestimmt.

Beachte: Für die graphische Darstellung einer analytischen Funktion sind die Argumentwerte x aus dem darzustellenden Bereich $[x_1;\ x_2]$ so auszusondern, daß

a) möglichst wenig Rechenarbeit zur Bestimmung der zugehörigen Funktionswerte y notwendig ist;
b) die Kurve, auf der die Punkte der Funktion liegen, mit ausreichender Sicherheit im vorgegebenen Bereich angebbar ist.

Beim Zeichnen der Verbindungslinie Punkte geht man meistens von der [illegible] sich um eine glatte Kurve handelt.

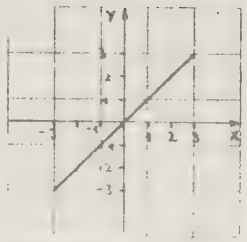
Die einfachste lineare Funktion erhalten wir, wenn wir a_1 gleich 1 setzen. Dann lautet die Funktion:

$f: x \to 1 \cdot x$.

Diese Funktion soll nun im Bereich $[-3; 3]_{\mathbb{Q}}$ graphisch dargestellt werden:

Wertetabelle

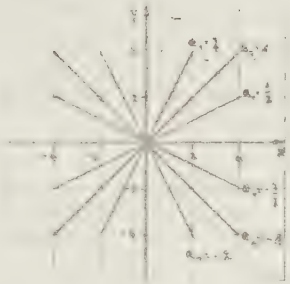
f: x	3	-3	0	1	-1
y	3	-3	0	1	-1



Der Graph der Funktion $f: x \to 1 \cdot x$ ist eine *Gerade durch den Ursprung* des Koordinatensystems. Um den Einfluß der Proportionalitätskonstanten a_1 auf den Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ zu überblicken, sind auf der folgenden Abbildung Funktionen mit verschiedenen Werten von a_1 dargestellt.

Wertetabelle:

x	-4	-2	-1	0	1	2	3
y = x	-4	-2	-1	0	1	2	3
y = -x	4	2	1	0	-1	-2	-3
y = 2x	-8	-4	-2	0	2	4	6
y = -2x	8	4	2	0	-2	-4	-6
y = $\frac{1}{2}$x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	3/2
y = $-\frac{1}{2}$x	2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$



Beschreiben Sie den Einfluß von a_1 auf das Bild der Funktion!

Beachten Sie folgende zwei Punkte: Für x=o ist der zugehörige Funktionswert für lineare Funktionen stets o. Für [illegible] der zugehörige Funktionswert stets gleich dem Wert für a_1 (siehe stark umrandetes Feld in der Wertetabelle).

Welchen Einfluß hat das Vorzeichen von a_1? (s. "Eigenschaften" Punkt 5 auf der nächsten Seite)

Eigenschaften des Funktionstyps $f: x \to a_1 \cdot x,\ x \in \mathbb{Q}$

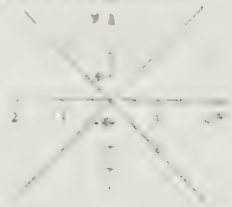
Eigenschaften von $f: x \to a_1 \cdot x$

1. **Die Funktion ordnet jedem $x \in \mathbb{Q}$ das a_1-Vielfache des x-Wertes als y-Wert zu.**
2. **Der Graph der Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung, *Ursprungsgerade* genannt.**
3. **Die geordneten Paare $(o \mid o)$ und $(1 \mid a_1)$ sind Elemente der Funktion.**
4. **Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt wird, ist der Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ durch Bestimmung zweier Punkte zeichenbar.**
   Leicht zu berechnende Punkte sind: $P_0(o \mid o)$ und $P_1(1 \mid a_1)$
5. **Ist die Proportionalitätskonstante a_1 positiv, so verläuft die Gerade ausschließlich im I. und III. Quadranten. Ist sie negativ, so verläuft die Gerade ausschließlich im II. und IV. Quadranten.**
6. **Je größer der Betrag von a_1, desto steiler verläuft die Gerade.**

Machen Sie sich diese Eigenschaften noch einmal an folgender Darstellung der Funktionen [illegible] und $f: x \to -2{,}1 \cdot x$ klar:

Wertetabelle:

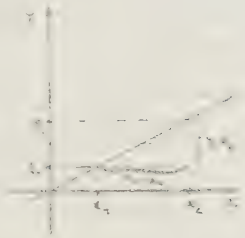
x	-2	-1	0	1	2
y = 2,1·x	-4,2	-2,1	0	2,1	4,2
y = -2,1·x	4,2	2,1	0	-2,1	-4,2



Wir wollen noch etwas bei der Bedeutung der Proportionalitätskonstanten a_1 verweilen.
Wie wir gesehen haben, unterscheiden sich die Graphen der Funktionen $f: x \to a_1 \cdot x$ für verschiedene Werte von a_1 hinsichtlich ihrer *Steigung*. Wir kennen diesen Begriff aus dem täglichen Leben als das Verhältnis von Höhendifferenz zu Horizontaldifferenz. Mathematisch bedeutet das:

Die Steigung m einer linearen Funktion ist definiert als das Verhältnis der Differenz zweier y-Werte zu der Differenz der zugehörigen x-Werte

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Steigung

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

b) aufzählende Darstellungen sind Wertetabelle und Graph

Wertetabelle:

Die Wertetabelle ist eine Teilmenge der geordneten Paare der Funktion. Welche Teilmenge man in die Wertetabelle aufnimmt, hängt vom Zweck der Wertetabelle ab. Folgende Gründe haben wir behandelt:

1. **Es sind die geordneten Paare von f für** <u>**bestimmte**</u> **Argumentwerte a gesucht. Dann werden** <u>**nur**</u> **diese a-Werte in die Wertetabelle aufgenommen.**

2. Es ist der Wertebereich W einer Funktion in einem Bereich $[a_1; a_2]_G$ gesucht.
   Dann wird man die Argumentwerte a im regelmäßigen Abstand aus dem Bereich $[a_1; a_2]_G$ aussondern.

3. **Es ist der Graph einer analytischen Funktion f im Bereich $[a_1; a_2]_G$ gesucht.**
   Dann wird man die Argumentwerte a in Verbindung mit dem Graphen so auswählen, daß man den Verlauf der Kurve, auf der die Punkte der Funktion liegen, mit einiger Sicherheit angeben kann.

Form: :

a	a_1	a_2	a_3
b	b_1	b_2	b_3

Graphische Darstellung:

Die graphische Darstellung analytischer Funktionen ist sehr übersichtlich. Wann immer man Aussagen über Zusammenhänge zwischen Argumentwerten a und Funktionswerten b machen will, wird man sinnvoller Weise die geordneten Paare der Funktion graphisch darstellen.

Form:

Wichtige Begriffe:
Zahlengerade (Achse),
Ursprung,
Abszisse (x), Ordinate (y),
Bildpunkt P $(x_1|y_1)$.
Koordinaten x und y,
Quadranten.

Anmerkung: **Sie sollten wissen, daß bei graphischen Darstellungen einer Funktion im Koordinatensystem der** *Ausschnitt* **und der** *Maßstab* **nach praktischen Gesichtspunkten ausgewählt werden muß.**

5. EINFACHE ANALYTISCHE FUNKTIONSTYPEN

In den vergangenen Kapiteln haben wir ausführlich die verschiedenen aufzählenden und beschreibenden Darstellungen funktionaler Zusammenhänge gelernt.
Dabei sollte jedem klar geworden sein, daß ***beschreibende*** **(analytische) Darstellungen** <u>**immer**</u> **in** ***aufzählende*** **Darstellungen (Wertetabelle, Graph) umgewandelt werden können.**
Eine ***aufzählende*** **Darstellung einer Funktion zwischen zwei Zahlenmengen A und B kann dagegen** <u>**nur dann**</u> **in eine** ***beschreibende*** **Darstellung umgewandelt werden, wenn**

1. Zwischen den Komponenten <u>aller</u> geordneten Paare der Funktion ein Zusammenhang besteht, der als <u>Rechenausdruck</u> angebbar ist;

2. dieser Zusammenhang erkannt wird.

Punkt 2. soll an folgendem Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Bei einer Ferienfahrt will jemand für seinen VW den Zusammenhang zwischen der gefahrenen Strecke s_{km} und der durchschnittlich benötigten Benzinmenge V_{Liter} feststellen. Hierzu bestimmt er bei jedem Tanken anhand des Tachos die Reisestrecke s_{km} und die schon verfahrene Benzinmenge V_{Liter}. Angenommen, er erhielt folgende Wertetabelle einer Funktion, die analytisch darstellbar sei:

G: s_{km} | 0 | 346 | 739 | 1000 | 1302 | 1684 | 1891
V_{Liter} | 0 | 31 | 66 | 89 | 118 | 150 | 169

Können Sie den entsprechenden Rechenausdruck angeben? Sicherlich nicht.
Der Zusammenhang zwischen s_{km} und V_{Liter} läßt sich für obige Wertetabelle durch die Funktionsgleichung

$$V_{Liter} = 0{,}089 \cdot s_{km}$$

beschreiben.

In vielen Wissenschaften bemüht man sich, den Zusammenhang zwischen zwei zahlenmäßig angebbaren Größen in analytischer Form darzustellen, da diese die präziseste, umfassendste und knappste Darstellungsform ist. Kennen Sie in der Physik eine Formel, die den Zusammenhang zwischen der Fahrzeit t und dem zurückgelegten Weg s eines Autos bei konstanter Geschwindigkeit v_0 beschreibt ($s = v_0 \cdot t$).

Auch in anderen Wissenschaften wie Biologie, Chemie, Psychologie, Wirtschaftslehre usw. wird die analytische Darstellung eines Zusammenhangs angestrebt.

Das Problem dieses Kapitels ist:

1. **Wie kann man bei einer Funktion, die in aufzählender Form gegeben ist, erkennen, ob der Zusammenhang als Rechenausdruck beschreibbar ist?**
2. **Wie bestimmt man die Funktionsgleichung einer als Wertetabelle oder Graph gegebene Funktion, wenn diese als analytische Funktion erkannt wurde?**

Vorgehensweise zur Klärung obiger Fragen:

Wir werden so vorgehen, daß wir eine Reihe einfacher, analytischer Funktionstypen besprechen und deren Eigenschaften untersuchen. Für jeden dieser Funktionstypen werden wir ein Verfahren lernen, wie man anhand des Graphens erkennen kann, ob es sich bei einer unbekannten Funktion um diesen Typ handelt. Im zweiten Schritt werden wir dann bei bekanntem Funktionstyp die Funktionsgleichung bestimmen.

Zu behandelnde Funktionstypen:

1. $f: x \to a_0$ **Name:** *konstante* **Funktion** (Graph: *Parallele zur x-Achse*)
2. $f: x \to a_1 \cdot x$ **Name:** *lineare* **Funktion** (Graph: *Ursprungsgerade*)
3. $f: x \to a_1 \cdot x + a_0$ **Name:** *allgemeine lineare* **Funktion** (Graph: *Gerade*)

Die Größen a_0 und a_1 sind konstante Zahlen aus der Menge der rationalen Zahlen; $a_0 \in \mathbb{Q}$ und $a_1 \in \mathbb{Q}$.

5.1 DIE KONSTANTE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{D}$

Die *konstante Funktion* $f: x \to a_0$ ist die einfachste analytische Funktion, die möglich ist. Sie ordnet jedem x des Definitionsbereiches D einen *konstanten Wert* $a_0 \in \mathbb{Q}$ zu. a_0 nennt man *Formvariable* der Funktion.

EIGENSCHAFTEN DES FUNKTIONSTYPS $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{D}$

Die Eigenschaften reeller Funktionen lassen sich stets sehr gut anhand der Graphen dieser Funktionen bestimmen. Um die zugeordneten Zahlenwerte y einer Funktion vom Typ $f: x \to a_0$ angeben zu können, muß die Formvariable a_0 zahlenmäßig festgelegt sein. Durch Festlegung dieses Zahlenwertes der Formvariablen kommt man vom Funktionstyp zu einer bestimmten Funktion.

Beispiel: Wie sieht der Graph der konstanten Funktion $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{N}$ im Bereich $[1;10]$ aus, wenn die Formvariable $a_0 = 3{,}1$ ist?

Wertetabelle:

f: x	1	10	[illegible]
y	3,1	3,1	3,1

Graph der Funktion

f: $x \to 3{,}1$; x [illegible]

Würde man als Formvariable $a_0 = -1{,}7$ wählen, so würden alle Punkte auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand $-1{,}7$ liegen:

Wertetabelle:

f: x	1	10	[illegible]
y	[illegible]	[illegible]	-1,7

Beachte: **Durch das Einsetzen verschiedener Werte für a_0 bleibt das typische Bild des Graphens einer konstanten Funktion erhalten (alle Punkte liegen auf einer Parallelen).**

Deshalb sagt man, daß al[illegible] Funktionen, deren Funktionsgleichu[illegible] d[illegible] $y = a_0$ ist, dem gleichen Typ an[illegible].

In unserem obigen Beispiel konnte x nur ganzzahlige Werte annehmen, da als Bedingung $x \in \mathbb{N}$ festgesetzt war. Diese Beschränkung wollen wir nun aufgeben und als Definitionsmenge D stets die Menge der rationalen Zahlen ($D = \mathbb{Q}$) voraussetzen.

Der Graph der Funktion f: $x \to 3{,}1$, $x \in \mathbb{Q}$ im Bereich $[-10; 10]$ ist dann aber eine *dichte Folge von Punkten*, die alle auf der Parallelen zur x-Achse im Abstand $a_0 = 3{,}1$ liegen:

Solche dichten Folgen von Punkten dürfen wir durch eine geschlossene Linie darstellen, *Kurve* genannt.

Kurve

Eigenschaften einer konstanten Funktion vom Typ $f: x \to a_0$; $x \in \mathbb{Q}$, $a_0 \in \mathbb{Q}$

Eigenschaften von f: $x \to a_0$

1. Die konstante Funktion ordnet jedem $x \in \mathbb{Q}$ einen konstanten y-Wert a_0 zu.
2. Der Graph der Funktion ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand $y = a_0$.
3. Man erhält den Graphen einer konstanten Funktion für einen Bereich $x = [x_1; x_2]$ durch Einzeichnen der Punkte $P(x_1|a_0)$ und $P(x_2|a_0)$, da eine Parallele durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist.
4. Graph der konstanten Funktion $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{Q}$, $x \in [x_1, x_2]$

ERKENNEN EINER KONSTANTEN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{Q}$ UND BESTIMMUNG DER GRÖSSE a_0

Im letzten Kapitel haben wir die Eigenschaften eines gegebenen Funktionstyps der Form $f: x \to a_0$ bestimmt. Hierzu haben wir für einen bestimmten Wert a_0 eine zugehörige Wertetabelle und den Graphen der Funktion dargestellt. In der Praxis trifft man meistens auf das umgekehrte Problem:

Der Zusammenhang zwischen zwei Größen ist in einer Untersuchung bestimmt worden. Das Ergebnis liegt demnach in aufzählender Form als Wertetabelle oder Graph vor, und man möchte den analytischen Ausdruck der Funktion angeben.

Sicher werden Sie fragen, wozu man den analytischen Ausdruck eines schon als Wertetabelle oder Graph gegebenen Untersuchungsergebnisses bestimmen will. Wichtigster Grund ist:

Untersuchungsergebnisse werden stets nur Teilmengen geordneter Paare einer Funktion darstellen. Will man für Argumentwerte a, die nicht direkt in der Wertetabelle aufgeführt sind, die zugehörigen Funktionswerte wissen, so ist das nur bei Kenntnis des analytischen Ausdrucks möglich.

Dies wollen wir uns an folgendem Beispiel klarmachen:

Bernd hat eine Uhr, die sich automatisch aufzieht. Eines Tages geht ihm der Mechanismus zur Verstellung der Zeiger kaputt. Dadurch ist er nicht mehr in der Lage, seine Uhr von Zeit zu Zeit auf die genaue Uhrzeit einzustellen. Nun ist die Reparatur der Uhr zu teuer, als daß es sich lohnen würde; auf der anderen Seite will er das "gute Stück" auch nicht wegwerfen, da sie ja immer noch läuft. Um sich aber weiterhin auf seine Uhr verlassen zu können, beschließt er, sie anhand der Bahnhofsuhr zu kontrollieren. Von einem bestimmten Zeitpunkt an notiert er sich jeden Tag die Beobachtungszeit t_h und die Differenz D_{uh} zwischen der Anzeige seiner Uhr und der Bahnhofsuhr. Ist die Differenz positiv, so bedeutet das: Seine Uhr geht vor.
Er erhält folgende Ergebnisse:

t_h	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
D_{uh}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Was sagt ihm diese Tabelle? Seine Uhr ist zu den [illegible] verschiedenen Zeitpunkten, wo er einen Uhrenvergleich durchgeführt hatte, ungefähr 10 Minuten vorgegangen. Darüberhinaus könnte er aber vermuten, daß nicht nur für diese Zeitpunkte, sondern für den gesamten Beobachtungszeitraum seine Uhr etwa *konstant* 10 Minuten vorgegangen ist und auch die nächsten 6 Tage (144 h) etwa *konstant* 10 Minuten vorgeht. Wenn seine Vermutung richtig ist, könnte er den Zusammenhang zwischen t_h und D_{uh} analytisch darstellen:

$f: t_h \to D_{uh} = 10$, $t_h \in [0; 288]_{\mathbb{Q}}$

Was hätte er dadurch gewonnen? Er könnte für jede beliebige Zeigerstellung seiner Uhr, die ja nicht die richtige Zeit anzeigt, die genaue Uhrzeit angeben. Hierzu müßte er nur von der angezeigten Zeit 10 Minuten abziehen. Zur Bestätigung seiner Vermutung überprüft er seine Uhr für kürzere Zeitabstände im Bereich $t_h \in [145; 155]_{\mathbb{Q}}$. Er erhält folgende Wertetabelle:

t_h	145	147	149	151	153	155
D_{min}	10	10,5	11	10	10,5	10

Bei diesen Ergebnissen kann er mit großer Sicherheit sagen, daß die Vermutung eines analytischen Zusammenhangs der Form $f: x \to a_0,\ x \in \mathbb{Q}$ zwischen t_h und D_{min} angenähert richtig war. Er weiß nun, daß für die nächsten 144 Stunden seine Uhr *konstant* um etwa 10 Minuten vorgeht. Durch einfache Umrechnung ist er also in der Lage, auch mit seiner vorgehenden Uhr die richtige Uhrzeit anzugeben.

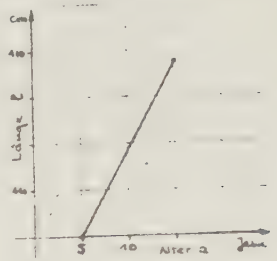
Wichtig ist noch, auf folgendes hinzuweisen: Zwischen der mathematischen Definition "konstant" und dem praktischen Gebrauch dieses Begriffs besteht ein bedeutsamer Unterschied:
In der Mathematik spricht man nur dann von einer konstanten Funktion, wenn allen Argumentwerten x derselbe Funktionswert $y = a_0$ zugeordnet wird. Bei dem vorliegenden Beispiel ist das nicht der Fall. Die zugeordneten D_{min}- Werte schwanken für $t_h \in [0; 155]$ im Bereich $W = [10;12]$. Diese Schwankungen sind für Bernds Zeitverhältnisse aber nicht bedeutungsvoll, da er seine Termine nie auf die Minute genau einhalten muß. Für ihn geht die Uhr praktisch *konstant* 10 Minuten vor.
Für die telephonische Zeitansage, die Bundesbahn usw. wäre Bernds Uhr nicht zu gebrauchen. Ihre Uhren dürfen nicht vorgehen und die Uhr muß über Monate auf die Sekunde genau richtig gehen. Ihr Begriff von "Konstanz" nähert sich mehr der mathematischen Definition.

Merksatz: Liegt ein Untersuchungsergebnis als Wertetabelle vor, deren zugeordnete Funktionswerte y mit hinreichender Genauigkeit alle gleich einem konstanten Wert a_0 sind, so läßt sich die Funktion durch den Typ $f: x \to y = a_0,\ x \in D$ beschreiben. Was man in der Praxis unter hinreichend konstant verstehen soll, hängt von dem jeweiligen Problem ab.

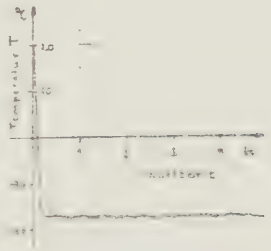
Ist das Untersuchungsergebnis als Graph gegeben, so läßt sich ähnlich einfach entscheiden, ob die aufzählende Darstellung durch eine analytische Funktion vom Typ $f: x \to y = a_0$ beschreibbar ist.

Beispiel: Gegeben seien folgende Untersuchungsergebnisse

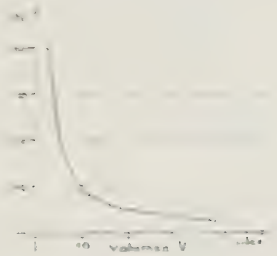
a) Zusammenhang zwischen dem Alter a_{Jahre} und der mittleren Körperlänge l_{cm} von deutschen Jungen.



b) Zusammenhang zwischen der Kühlzeit t_h und der Temperatur $T_{°C}$ eines Metallwürfels, den man zum Zeitpunkt $t_h = 0$ in eine Kühltruhe legt.



c) Zusammenhang zwischen dem Volumen V_{Liter} und der notwendigen Zahl von Kartons N, um 100 Liter Eipulver zu verpacken.



Gesucht ist jeweils der analytische Ausdruck, der obige Versuchsergebnisse beschreibt.

Verfahren zur Bestimmung des analytischen Ausdrucks einer Funktion aufgrund der Kenntnis des Graphen:

1. Schritt: Im ersten Schritt versucht man den Funktionstyp zu erkennen. Hierzu vergleicht man die Graphen mit den Graphen, deren Funktionstyp man kennt.
Im obigen Beispiel a) und c) ist der Funktionstyp unbekannt. Also können Sie die analytische Darstellung nicht angeben.
Dagegen entspricht Beispiel b) für $t_h > 0{,}2$ annähernd dem Graph einer konstanten Funktion, da alle Punkte angenähert auf einer Parallele zur x-Achse liegen; also $f: x \to a_0,\ x \in D$

2. Schritt: Wenn man den Funktionstyp bestimmen konnte, muß man nun den Wert für die Formvariable a_0 angeben. Hierzu liest man für irgendeinen t_h-Wert den zugehörigen T_τ-Wert für $t_h > 0{,}2$ ab. Im obigen Beispiel erhält man den Wert $T_\tau = -17$. Aufgrund der Kenntnis der Eigenschaften konstanter Funktionen kann man nun sofort den Wert für die Formvariable a_0 angeben, da $a_0 = T_\tau$ ist; also $a_0 = -17$.

3. Schritt: Im dritten Schritt setzt man a_0 in den zugrundegelegten Funktionstyp $f: x \to a_0$ ein; also $f: t_h \to T_\tau = -17$ für $t_h \in [0{,}2;5]_Q$

Beachte: Die Bestimmung der Funktionsgleichung einer als Wertetabelle oder Graph gegebenen Funktion läuft stets über zwei wichtige Schritte ab:

1. Erkennen des Funktionytyps;
2. Bestimmen der Formvariablen.

Erkennt man den Funktionstyp einer gegebenen Funktion nicht, so bedeutet das noch nicht, daß diese Funktion keinem Funktionstyp entspricht. Z.B. lassen sich zu obigen Beispielen a) und c) ebenfalls analytische Funktionen angeben (für Beispiel a): $F: a_{\text{Bakt}} \to l_{\text{cm}} = 90 + 5a_{\text{Bakt}}$ für $a_{\text{Bakt}} \in [5;15]_Q$ und für Beispiel c): $G: V_{\text{Bakt}} \to N = \frac{100}{V_{\text{Bakt}}}$. Allerdings haben wir diese Typen noch nicht behandelt.

II. LINEARE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 x$, $x \in Q$

Die linearen Funktionen vom Typ $f: x \to a_1 x$ sind die anspruchsschwierigsten analytischen Funktionen. $f: x \to a_1 x$

EIGENSCHAFTEN DES FUNKTIONSTYPS $f: x \to a_1 x$, $x \in Q$

Die Rechenvorschrift $x \to a_1 x$ bedeutet:

"Ordne jedem $x \in Q$ das a_1-Vielfache des x-Wertes als y-Wert zu."

Man sagt: *"Der zugeordnete y-Wert ist proportional dem x-Wert."*

Die Formvariable a_1 bezeichnet man als *Proportionalitätskonstante* einer linearen Funktion. *Proportionalitätskonstante*

Welche Eigenschaften besitzt dieser Funktionstyp? Um dies zu klären, geben wir uns wieder einen speziellen Wert für die Formvariable a_1 vor und zeichnen den Graphen dieser speziellen Funktion.

Am einfachsten ist es, wenn wir für a_1 den Wert 1 annehmen. Dann lautet die Funktion: $f: x \to 1 \cdot x$

Diese Funktion soll nun im Bereich $x \in [-3;3]_Q$ graphisch dargestellt werden:

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	3	-3	0	[illegible]

Der Graph der Funktion $f: x \to 1 \cdot x$ ist eine *Gerade durch den Ursprung* des Koordinatensystems. Um den Einfluß der Proportionalitätskonstanten a_1 auf den Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ zu überblicken, sind auf der folgenden Abbildung Funktionen mit verschiedenen Werten von a_1 dargestellt.

Wertetabelle:

	-3	-2	[illegible]	0	1	2	3
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible] Die Größe der Formvariablen a_1 [illegible] der Ursprungsgeraden!

Beachten Sie noch folgende Eigenschaften der Funktion.

Für $x = 0$ [illegible] der zugehörige Funktionswert für lineare Funktionen stets 0. Für $x = 1$ ist der zugehörige Funktionswert stets gleich dem Wert für a_1 (siehe stark umrandetes Feld in der Wertetabelle).

Welchen Einfluß auf den Graph der Funktion hat das Vorzeichen von a_1 (siehe "Eigenschaften" Punkt 5 auf der [illegible] Seite) ?

Eigenschaften des Funktionytyps $f: x \to a_1 \cdot x$,

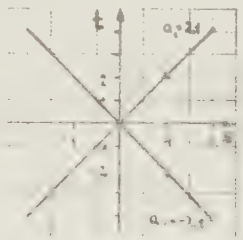
Eigenschaften von $f: x \to a_1 \cdot x$

1. Die Funktion ordnet jedem $x \in \mathbb{Q}$ das a_1-Vielfache des x-Wertes als y-Wert zu.
2. Der Graph der Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung, *Ursprungsgerade* genannt.
3. Die geordneten Paare $(0|0)$ und $(1|a_1)$ sind Elemente der Funktion.
4. Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt wird, ist der Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ durch Bestimmung zweier Punkte zeichenbar. Leicht zu berechnende Punkte sind: $P_0(0|0)$ und $P_1(1|a_1)$.
5. Ist die Proportionalitätskonstante a_1 positiv, so verläuft die Gerade ausschließlich im I. und III. Quadranten. Ist sie negativ, so verläuft die Gerade ausschließlich im II. und IV. Quadranten.
6. Je größer der Betrag von a_1, desto steiler verläuft die Gerade.

Machen Sie sich diese Eigenschaften noch einmal an folgender Darstellung der Funktion $f: s \to t=2,1 \cdot s$ und der Funktion $f: s \to t=-2,1 \cdot s$

Wertetabelle:

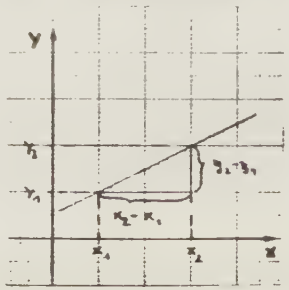
s	-2	-1	0	1	2
t=2,1·s	-4,2	-2,1	0	2,1	4,1
t=-2,1·s	4,2	2,1	0	-2,1	-4,1



Wir wollen noch etwas bei der Bedeutung der Proportionalitätskonstanten a_1 verweilen.
Wie wir gesehen haben, unterscheiden sich die Graphen der Funktionen $f: x \to a_1 \cdot x$ für verschiedene Werte von a_1 hinsichtlich ihrer *Steigung*. Wir kennen diesen Begriff aus dem täglichen Leben als das Verhältnis von Höhendifferenz zu Horizontaldifferenz. Mathematisch bedeutet das:

Die Steigung m einer linearen Funktion ist definiert als das Verhältnis der Differenz zweier y-Werte zu der Differenz der zugehörigen x-Werte

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In dieser Definition wird nichts darüber ausgesagt, welche Paare $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ der linearen Funktion $f: x \to a_1 x$ gemeint sind. Das ist auch nicht notwendig, da diese Formel für alle geordneten Paare von f gilt.

Beweis: Ersetzt man die Werte y_1 und y_2 in obiger Formel für m durch $y_1 = a_1 x_1$ und $y_2 = a_1 x_2$, so erhält man

$$m = \frac{a_1 \cdot x_2 - a_1 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_1 \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a_1$$

Daraus folgt: *Die Steigung m einer linearen Funktion vom Typ $f: x \to a_1 x$ ist gleich der Proportionalitätskonstanten a_1.*

ERKENNEN EINER LINEAREN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 x$ UND BESTIMMUNG DER GRÖSSE a_1

Nachdem wir nun für den weiteren Funktionstyp der Form $f: x \to a_1 x$ seine Eigenschaften kennengelernt haben, wollen wir wieder zum eigentlichen Problem zurückkehren:
Der Zusammenhang zwischen zwei zahlenmäßig beschreibbaren Größen sei in einer Untersuchung bestimmt worden. Das Ergebnis liegt demnach in aufzählender Form als Wertetabelle oder Graph vor. Man möchte die analytische Darstellung (Funktionsgleichung) angeben.

Beispiel: Nachdem immer mehr [illegible] lichkeit von Rauchern keinen Zweifel mehr daran lassen, daß Rauchen auf die Dauer sehr gefährlich ist, wollen viele Raucher sich das Rauchen abgewöhnen.
Psychologen empfehlen als ersten Schritt, das eigene Rauchverhalten zu beobachten. Man kauft sich hierzu einen Kalender, und für jede gerauchte Zigarette macht man einen Strich. Ein 17jähriger, der sein Rauchverhalten über 14 Tage beobachtete, erhielt folgenden Zusammenhang zwischen dem Beobachtungszeitraum t_{Tage} und der Zahl der gerauchten Zigaretten N:

Z:

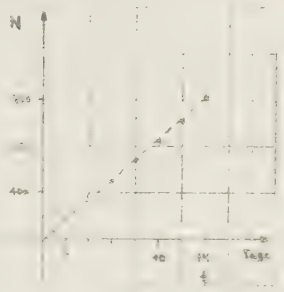
t_{Tage}	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	20	44	69	91	101	124	150	170	192	212	234

12	13	14
256	277	308

Da er in Mathematik gerade gelernt hat, daß es teilweise möglich ist, solche Untersuchungsergebnisse analytisch darzustellen, versucht er, den analytischen Ausdruck dieser Funktion zu bestimmen. Im Gegensatz zu *konstanten* Funktionen ändern sich in diesem Beispiel die Funktionswerte ständig. Es

kann sich also nicht um diesen Funktionstyp handeln. Bevor er noch lange über die Wertetabelle nachdenkt, stellt er diese graphisch dar. Denn im Unterricht hat er gelernt, daß graphische Darstellungen wesentlich übersichtlicher sind als Wertetabellen.

Graph der Funktion 2



Was kann er anhand des Graphen über seine Untersuchung aussagen? Er erkennt, daß alle Punkte ungefähr auf einer Geraden liegen, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Solche graphische Darstellungen hat er aber bei den linearen Funktionen vom Typ $f: x \rightarrow a_1 x$ schon kennengelernt.
Nachdem er im ersten Schritt den Funktionstyp bestimmt hat, muß er nun im zweiten Schritt den Wert der Formvariablen a_1 über die Steigungsformel anhand zweier geordneter Paare der Geraden bestimmen:

Setzt man z.B. die Koordinaten der Punkte $P_1(0|0)$ und P_2 (10|215) der Geraden in die Steigungsformel

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ein,}$$

so erhält man:

$$a_1 = m = \frac{215 - 0}{10 - 0} = 21,5$$

Ein ähnliches Ergebnis erhält man für zwei weitere Punkte der Geraden; z.B. (1|20) und (14|305).

$$a_1 = \frac{305 - 20}{14 - 1} = \frac{285}{13} = 21,9$$

Theoretisch müßte in beiden Rechnungen der gleiche Wert für die Formvariable a_1 herauskommen. Praktisch wird man aber Abweichungen zulassen müssen, da wir die Koordinaten der Punkte nicht sehr genau bestimmen konnten. In solchen Fällen müssen wir den berechneten Wert für a_1 aufrunden.

Auf Grund unserer Berechnungen erhielten wir für a_1 die Werte

$a_1 = 21,5$ und $a_1 = 21,9$

Näherungsweise können wir für a_1 den Wert 22 annehmen. Diesen Wert müssen wir nun in die Funktionsgleichung des Typs $f: x \rightarrow a_1 \cdot x$ einsetzen:

$$N = 22 \cdot t_{Tage}, \quad t_{Tage} \in [0; 14]$$

Der 17jährige weiß nun, daß bei seinem Rauchverhalten in 3oo Tagen etwa 66ooo mal zur Zigarette greift. Oder, daß sich seine Blutgefäße 66ooo im Jahr zusammenkrampfen, wenn er so weiter raucht!

Beachte: Häufig werden folgende Fehler bei der Berechnung von a_1 gemacht

1. Im Zähler der Steigungsformel werden statt der Funktionswerte y die Argumentwerte x eingesetzt!
2. Die Reihenfolge der Funktionswerte y stimmt nicht mit der Reihenfolge der Argumentwerte x überein.

Beide Fehler können sehr schnell entdeckt werden, wenn die x-Koordinate eines weiteren Punktes der Funktion in die berechnete Funktionsgleichung einsetzt. Beschreibt die Funktionsgleichung die vorgegebene Funktion, so muß für den eingesetzten x-Wert des weiteren Punktes dessen Funktionswert y bei der Rechnung herauskommen.
Ein weiterer Punkt unsres betrachten Beispiels ist P(1o|22o)
Die berechnete Funktionsgleichung lautete

$$N = 22 \cdot t_{Tage} \Longrightarrow \quad N = 22 \cdot 1o = 22o$$

Damit haben wir für einen weiteren Punkt die Richtigkeit der berechneten Funktionsgleichung gezeigt!

Ist das Untersuchungsergebnis als *Graph* gegeben, so entfällt die graphische Darstellung zur Erkennung des Funktionstyps, wie sie bei Wertetabellen notwendig ist.

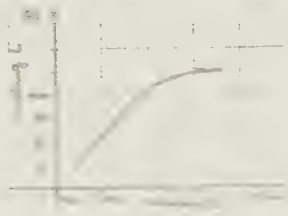
Beispiel. Gegeben seien folgende vier Untersuchungsergebnisse, deren analytische Darstellung gesucht ist:

2) Zusammenhang zwischen Lichtbedingungen I (gemessen in Lux) und der Ermüdung E (gemessen in % bezogen auf die Ermüdung bei 7oo Lux) beim arbeitenden Menschen.

b) Zusammenhang zwischen Jahreszeit J_{Monate} und [illegible] in 10 m Tiefe (Meßwerte vom Königsee).

c) Zusammenhang zwischen dem Mehrwertsteuerbetrag M_{3m} und dem Nettopreis P_{3m}.

d) Zusammenhang zwischen der Leistung L_{PS} und der Umdrehungszahl $Z_{Kurbeln}$ eines Automotors.



Verfahren zur Bestimmung der Funktionsgleichung:

1. Schritt: Bestimmung des Funktionstyps

im Fall a) ist [illegible]
im Fall b) liegt konstante Funktion $f: x \to a_0$ vor
im Fall c) liegt lineare Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ vor
im Fall d) ist der Funktionstyp unbekannt.

2. Schritt: Bestimmung der Formvariablen für die erkennten Funktionstypen

im Fall b) läßt sich Formvariable a_0 direkt ablesen; $a_0 = 4$

Im Fall c) muß die Formvariable a_1 über die Steigungsformel berechnet werden. Hierzu benötigt man zwei geordnete Paare der Funktion. Da die Wertetabelle nicht gegeben ist, muß man diese aus dem Graph entnehmen. Hierbei wird man sich die Arbeit dadurch erleichtern, daß man die Koordinaten der Punkte bestimmt, die leicht ablesbar sind:

z.B. (0|0) und (100|11)

Also $a_1 = \frac{11 - 0}{100 - 0} = \frac{11}{100} = 0{,}11$

3. Schritt: Einsetzen der berechneten Formvariablen in die Funktionstypen.

im Fall b) erhält man die Funktion $f: J_{Monate} \to T_{0C} = 4$

im Fall c) erhält man die Funktion $f: P_{3m} \to M_{3m} = 0{,}11 \cdot P_{3m}$

Wie schon oben erwähnt, macht die Bestimmung geordneter Paare aus Graphen gewisse Schwierigkeiten, sodaß nur ungenaue Werte für die Berechnung der Formvariablen abgelesen werden können.

4. Schritt: Überprüfung der gefundenen Funktionsgleichung:

Auch bei der Umwandlung einer graphischen [illegible] ist eine Überprüfung der Funktionsgleichung, die man bestimmt hat, möglich.

Für Fall b) (konstante Funktion) ist die Prüfung [illegible] teren x-Wert den zugehörigen Funktionswert y.

Für Fall c) würde man z.B. die p-Koordinate des Punktes P(50|5) in die Funktionsgleichung

$M_{3m} = 0{,}11 \cdot P_{3m}$ einsetzen. $\Rightarrow$

$M_{3m} \overset{!}{=} 0{,}11 \cdot 50 = 5{,}5$

Ist die Funktionsgleichung richtig bestimmt worden, so muß der berechnete M_{DM}-Wert mit dem Funktionswert des betrachteten Punktes P übereinstimmen.

[illegible] gegebene Funktionsgleichung erfüllt, da Ablesefehler unvermeidlich sind. Die Abweichungen sind allerdings für unsere Zwecke so gering, daß wir den analytischen Ausdruck als richtig annehmen wollen.

Damit haben wir die Eigenschaften des Funktionstyps $f: x \to a_1 \cdot x$ ausreichend behandelt und gelernt, wie man die Funktionsgleichung bei gegebener [illegible] kann.

5.3 DIE ALLGEMEINE LINEARE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$, $x \in Q$

Die allgemein lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ setzt sich <u>aus</u> <u>zwei</u> uns schon bekannten Funktionstermen zusammen.

1. dem Term a_o, den wir von den konstanten Funktionen $f: x \to a_o$ her kennen,
2. dem Term $a_1 x$, den wir bei der linearen Funktion $f: x \to a_1 x$ behandelt haben.

Das wollen wir uns an folgendem Beispiel klarmachen:

Gesucht sei der Graph der Funktion

$y = 1 \cdot x + 1$

Wie schon festgestellt, setzt sich diese Funktion aus der Ursprungsgeraden $y=1 \cdot x$ und der konstanten Funktion $y= 1$ zusammen.
Wir zeichnen zuerst den ersten Term der Funktion, die Ursprungs gerade $y=1 \cdot x$ (s.Abb.1). Den Graph der gesuchten Funktion $y = 1 \cdot x + 1$ erhält man, wenn man jeden Punkt der Ursprungsgeraden um den Wert des konstanten Gliedes $a_o=1$ (also in unserem Beispiel um 1 Einheit) nach oben verschiebt.So wird aus dem Punkt (o|o) der Punkt (o|1), aus dem Punkt (-1,5|-1,5) der Punkt (-1,5|-o,5), u.s.w
Machen Sie sich den Einfluß eines konstanten Gliedes a_o auf das Bild der Ursprungsgeraden an den folgenden Abbildungen klar:

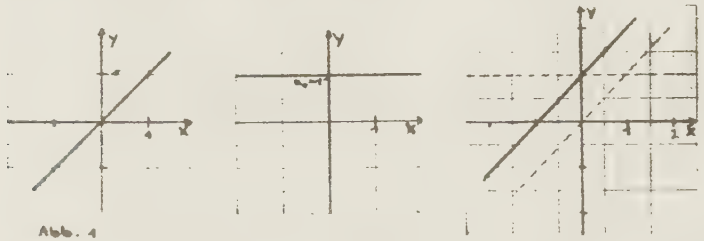


Abb. 4

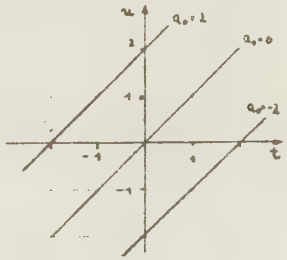
lineare Funktion + konst. Funktion = allg. lineare Funktion

$f: x \to a_1 \cdot x$ $\quad$ $f: x \to a_o$ $\quad$ $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$

Beachte: Man erhält den Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ aus dem Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ durch eine Parallelverschiebung der Ursprungsgeraden um den Wert des konstanten Gliedes a_o.

Machen Sie sich diese Aussage noch einmal an dem folgenden Beispiel klar! Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse und dem Wert für a_o ?

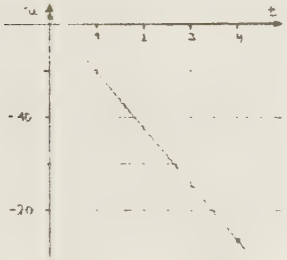
Graph der Funktion
$f: t \to a_1 \cdot t + a_o$ für
$a_o = -2, 0, 2$



Nachdem wir den Einfluß des konstanten Gliedes a_o auf den Graph der linearen Funktion (Ursprungsgeraden) klar gemacht haben, wollen wir eine weitere Funktion dieses Typs zeichnen.

Gegeben sei die allg. lineare Funktion $f: t \to -6 \cdot t + o,7$ deren Graph im Bereich $t \in [o;4]_Q$ gesucht sei.
Da wir schon wissen, daß der Graph einer allg. linearen Funktion stets eine Gerade ist, beschränkt sich unsere Wertetabelle auf diejenigen geordneten Paare,die den Bereichsgrenzen entsprechen; also auf t=o und t=4 :

t	o	4
u	o,7	-23,3



Auch hier gilt : Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $(o|a_o)$!

Eigenschaften der Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x + a_0$

1. Der Graph der Funktion ist eine Gerade mit [illegible] Steigung a_1. [illegible] $(0|a_0)$ schneidet.

   Die konstante Funktion $f: x \to a_0$ ist ein Spezialfall [illegible] allgemeinen linearen Funktion [illegible] a_1 [illegible]

   [illegible] Ursprungsgeraden $f: x \to a_1 x$ sind Spezialfälle von $f: x \to a_1 x + a_0$ für $a_0 = 0$

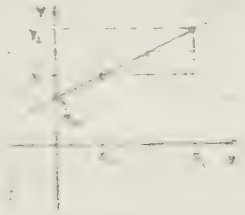
2. [illegible] Graph einer allgemeinen linearen Funktion gesucht, so erhält man diesen sehr einfach, wenn man daran denkt, daß [illegible] durch zwei Punkte eindeutig [illegible] ist.

   Leicht zu berechnende Punkte sind:

   [illegible]

4. Graph des Funktionstyps $f: x \to a_1 \cdot x + a_0$, $x \in \mathbb{Q}$

   $a_1 = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ERKENNEN EINER ALLGEMEINEN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 \cdot x + a_0$

UND BESTIMMUNG DER KONSTANTEN a_1 UND a_0

Als dritten Funktionstyp haben wir die *allgemeine lineare Funktion* $f: x \to a_1 x + a_0$ kennengelernt. Auch diesmal wollen wir wieder an verschiedenen Beispielen aus der Praxis lernen, wie man erkennt, ob der jeweils betrachtete Zusammenhang sich durch diesen Typ beschreiben läßt. Weiterhin werden wir lernen, wie man die Formvariablen a_0 und a_1 berechnen kann.

Beispiel: In einer Kerzenfabrik will man für eine dicke Kerze die Brenndauer bestimmen. Hierfür wird folgender Versuch durchgeführt: Man stellt die Kerze auf eine Waage, zündet sie an und bestimmt für verschiedene Zeitpunkte t_n den Prozentsatz P_n der noch nicht verbrannten Kerzenmasse (bezogen auf das Anfangsgewicht). Man möge [illegible] halten haben.

k :	t_n	0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
	P_n	100	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Um den Punkt [illegible] wir die Werte [illegible] dar:

Wie wir bei der Zusammenfassung der Eigenschaften allgemeiner linearer Funktionen schon festgestellt haben, ist dieser Typ dadurch gekennzeichnet, daß alle Punkte der Funktion auf einer *Geraden* liegen.
Umgekehrt können wir sagen:

Ist der Graph einer Funktion eine Gerade, so [illegible] sich um den Funktionstyp [illegible]

Die Punkte der Funktion k liegen [illegible] auf einer Geraden; für die vorliegende Untersuchung wird man also annehmen können, daß es sich um den Typ $f: x \to a_1 x + a_0$ handelt.

Steht es fest, das eine Funktion vom Typ einer allgemeinen linearen Funktion ist, so ergibt sich ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Formvariablen a_1 und a_0, wenn die Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_1+a_0)$ Elemente des gegebenen Graphen sind. Das wollen wir uns an obigem Beispiel verdeutlichen. Wir bestimmen deshalb die Koordinaten der Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_1+a_0)$, da für $x = 0$ und $x = 1$ die zugehörigen y-Werte in sehr einfacher Beziehung zu den Größen a_0 und a_1 stehen:

$y(x = 0) = a_0$ und $y(x = 1) = a_1 + a_0$

Für das obige Beispiel lesen wir aus dem Graphen:

$P(t_n = 0|a_0) = P(0|100) \to \underline{a_0 = 100}$

und

$P(t_n = 1|a_1 + a_0) = P(1|80) \to a_1 + a_0 = 80$

$a_1 = 80 - a_0 = 80 - 100$

$\underline{a_1 = -20}$

Die Funktion k, die den Zusammenhang zwischen der Brennzeit t_h und dem Prozentsatz $P_{\%}$ der noch verbleibenden Kerzenmasse angenähert beschreibt, lautet also:

$k: t_h \rightarrow P_{\%} = -20t_h + 100 \quad , \quad \text{für } t_h \in [0; 3]_Q$

An dieser Stelle können wir noch einmal auf die Bedeutung der analytischen Darstellung im Gegensatz zur Wertetabelle eingehen. Die Kerzenfabrik könnte anhand der Wertetabelle noch nicht angeben, wie lange obiger Kerzentyp brennt. Unter der Annahme, daß der analytische Ausdruck den Zusammenhang zwischen t_h und $P_{\%}$ nicht nur im Bereich $t_h \in [0; 3]$, sondern bis zum Verlöschen annähernd richtig beschreibt, können wir die maximale Brenndauer t_h^{max} berechnen, indem wir $P_{\%} = 0$ setzen:

Für t_h^{max} gilt $P_{\%} = 0 \rightarrow 0 = -20t_h + 100$

Daraus folgt: $t_h = 5$

Die maximale Brenndauer dieser Kerze liegt also bei ungefähr 5 Stunden.

Beachte: Auf Grund der Kenntnis des analytischen Ausdrucks konnten wir Eigenschaften der Kerze (max. Brenndauer) bestimmen, die wir nicht direkt gemessen haben. Darin liegt die besondere Bedeutung analytischer Ausdrücke!

Beachte: Nicht immer sind die Koordinaten der Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_1+a_0)$ angebbar!

Beispiel: Gegeben sei folgende Wertetabelle einer Funktion:

f:

x	2	2,5	3	3,5
y	2	1	0	-1

Typ: $f: x \rightarrow a_1x+a_0$

Graph der Funktion

Die Anwendung des einfachen Verfahrens ist hier nicht möglich, da die Koordinaten der Punkte für x=o und x=1 nicht angebbar sind.

In solchen Fällen muß man a_1 und a_0 nach dem folgenden Verfahren berechnen:

1. Bestimme für zwei Punkte die zugehörigen Koordinaten x und y. (In unserem Fall: $P(3|0)$ und $P(2|2)$)
2. Berechne a_1 nach der Formel $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

   (Für P_1 und P_2 $\rightarrow$ $a_1 = \frac{0 - 2}{3 - 2} = \frac{-2}{1} = -2$)

3. Setze den gefundenen Wert für a_1 in die Funktionsgleichung für allgemeine lineare Funktionen $y=a_1x+a_0$ ein, (für obiges Beispiel $y = -2x+a_0$).
4. Setze in diesen speziellen Ausdruck die Koordinaten von P_1 oder P_2 ein und bestimme die Unbekannte a_0.

   (Für P_1 gilt: $0 = -2\cdot 3 + a_0 \rightarrow a_0 = 6$
   Für P_2 gilt: $2 = -2\cdot 2 + a_0 \rightarrow a_0 = 6$)

Beachte: Für beide Punkte P_1 und P_2 erhält man denselben Wert für a_0.

5. Angabe der analytischen Funktion: $f: x \rightarrow -2x + 6$

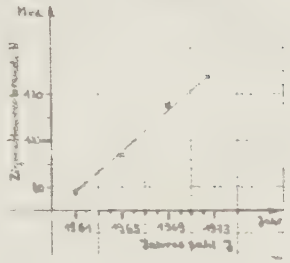
Zur Begründung dieses Verfahrens: War der analytische Ausdruck einer Funktion *gegeben*, so erhielt man die Koordinaten jedes Punktes der Funktion, indem man zu vorgegebenem x-Wert den zugehörigen y-Wert mittels der Funktionsgleichung der Funktion berechnete. Umgekehrt muß der gesuchte analytische Ausdruck eines *gegebenen* Graphen einer Funktion so beschaffen sein, daß die Koordinaten der Punkte des Graphe die Funktionsgleichung erfüllen. Deshalb erhalten wir die unbekannten Konstanten a_1 und a_0 durch Einsetzen von Koordinaten in die allgemeine Funktionsgleichung $y=a_1x+a_0$, wenn es sich um den Typ $f: x \rightarrow a_1x+a_0$ handelt.

weiteres Beispiel: Westdeutschlands Raucher lagen 1970 auf Platz 9 in der Rangliste der zigarettenrauchenden Nationen. Dabei läßt sich der Zusammenhang zwischen der Zahl der jährlich gerauchten Zigaretten $N_{Mrd.}$ und der Jahreszahl J_{Jahr} folgender Wertetabelle entnehmen:

f:

J_{Jahr}	1961	1965	1969	1972
N_{Mrd}	78	94	115	128

Graph der Funktion f



Gesucht ist die analytische Darstellung dieser Funktion.

1. Erkennen des f-Typs : $f: x \to a_1x+a_0$

2. Berechnung von a_1 für P(1961|78) und P(1972|128) : $a_1 = \frac{128 - 78}{1972-1961} = \frac{50}{11} = \underline{4,6}$

3. Einsetzen von a_1 in die Funktionsgleichung $y=a_1x+a_0$: $N_{Mrd} = 4,6\ J_{Jahr} + a_0$

4. Bestimmung von a_0 durch Einsetzen der Koordinaten eines der beiden Punkte z.B. P(1961|78) :

$$78 = 4,6 \cdot 1961 + a_0$$
$$78 = 9020 + a_0$$
$$a_0 = -9020 + 78$$
$$\underline{a_0 = -8942}$$

5. Angabe der analytischen Funktion : $\underline{f: J_{Jahr} \to N_{Mrd} = 4,6\ J_{Jahr} - 8942}$

6. Um die Richtigkeit des analytischen Ausdrucks zu bestätigen setzt man die Koordinaten eines weiteren Punktes des Graphen in die gefundene Funktionsgleichung ein, z.B. P(1970|118) :

$$118 \overset{?}{=} 4,6\ 1970 - 8942$$
$$\overset{?}{=} 9062 - 8942$$
$$118 \sim 120$$

Damit wollen wir den Lehrtext über Relationen und Funktionen abschließen. Wir haben dabei eine Fülle von neuen Begriffen und Methoden kennengelernt, die Sie natürlich nicht alle behalten können. Deshalb werden die Inhalte, die in neuem Zusammenhang immer wieder gebraucht, noch einmal übersichtlich dargestellt.

Zusammenfassung

1. Eine analytische Funktion ist eine eindeutige Relation zwischen zwei Zahlmengen A und B, deren Relationsvorschrift als Rechenvorschrift angebbar ist.

2. Es gibt verschiedene Arten, analytische Funktionen darzustellen:

   a) analytische Darstellung:

   Die analytische Darstellung ist die allgemeinste und knappste, aber auch wichtigste Darstellungsform.

   Form: $f : x \to$ Rechenausdruck für y

   Beispiel: $f : x \to x - 3$

   b) Wertetabelle:

   In der Wertetabelle werden einzelne geordnete Paare der Funktion aufgezählt. Die Wertetabelle stellt stets nur ein Teilmenge der Funktion dar.

   In der Regel müssen die Paare einer Wertetabelle durch Einsetzen von x-Werten in die Funktionsgleichung berechnet werden. Die x-Werte sind nach sinnvollen Kriterien auszuwählen:

   Form: $f : \begin{array}{|c|} \hline x \\ \hline y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \cdots \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & \cdots \end{array}$

   c) graphische Darstellung im Koordinatensystem:

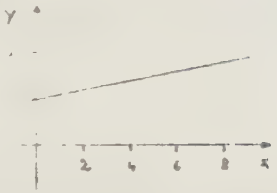
   Die graphische Darstellung ist die übersichtlichste Darstellungsform einer analytischen Funktion in einem Teilbereich $[x_1; x_2]$, $x \in D$

   Durch sie bekommt man einen ersten Eindruck, um welchen Funktionstyp es sich bei Funktionen, die als Wertetabelle gegeben sind, handelt. Maßstab und Ausschnitt sind den darzustellenden Wertebereichen anzupassen.

Graph der Funktion

$f: x \to 0,1x + 1$

$\mathbb{Q}$



3. Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungsarten:

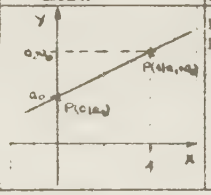
Die drei Darstellungsarten analytischer Ausdruck (AA), Wertetabelle (WT) und Graph (GF) sind ineinander überführbar. In nebenstehendem Graph ist das Vorgehen bei Änderung der Darstellungsart kurz erläutert:

Ist der analytische Ausdruck (AA) gegeben, so kommt man zur graphischen Darstellung (GF) nur, wenn man eine Wertetabelle (WT) anfertigt.

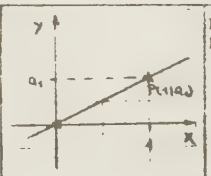
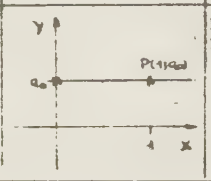
Ist WT gegeben, so gewinnt man den AA der Funktion am einfachsten, wenn man WT in GF umwandelt.

Zur Bestimmung einer WT aus GF ist der Weg über AA nicht notwendig.

4. einfache analytische Funktionen

TYP	NAME	GRAPH	PUNKTE	BEGRIFFE
$f: x \to a_1x+a_0$	allgemeine lineare Funktion		$P(0\|a_0)$ $P(1\|a_1+a_0)$	Steigung m $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ linear

Spezialfälle allgemeiner linearer Funktionen

$f: x \to a_1x$ $a_0 = 0$	lineare Funktion		$P(0\|0)$ $P(1\|a_1)$	proportional
$f: x \to a_0$ $a_1 = 0$	konstante Funktion		$P(0\|a_0)$ $P(1\|a_0)$	konstant

5. Sie sollten die Verfahren kennen, nach denen man die analytischen Ausdrücke linearer Funktionen, die als Wertetabelle oder Graph gegeben sind, bestimmen kann.

LEHRTEXT B

RELATIONEN UND FUNKTIONEN

KARL WOLF HOFFMANN

INSTITUT DIDAKTIK DER PHYSIK
UNIVERSITÄT FFM

EINFÜHRUNG UND ÜBERBLICK

Der vorliegende Lehrtext hat das Ziel, Sie auf etwas ungewohnte Weise in das Gebiet der *Relationen* und *Funktionen* einzuführen. Ungewohnt deshalb, weil die Lehrinhalte nicht von einem Lehrer, sondern über den vorliegenden Lehrtext vermittelt werden.

In dem vorliegenden Lehrtext beginnen wir mit einer Wiederholung einiger wichtiger Begriffe und Darstellungen aus der Mengenlehre. Dabei werden wir vom Begriff der *Menge* und ihrer *Elemente* zu speziellen Mengen aus *geordneten Paaren*, *Paarmengen* oder *Relationen* genannt, übergehen. Dabei werden wir die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten [illegible] lernen. Durch Einschränkung des Relationsbegriffs auf *eindeutige Relationen* gelangen wir zu den *Funktionen*. Auch hier werden wir wieder die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten besprechen und zum Schluß auf einfache *analytische Funktionen* und ihre Darstellung eingehen. Besonderes Gewicht wird auf das Anfertigen graphischer Darstellungen und das Erkennen einfacher analytischer Funktionen gelegt.

1. WIEDERHOLUNG EINIGER BEGRIFFE UND DARSTELLUNGEN AUS DER MENGENLEHRE

1.1 MENGE UND ELEMENT

Unter einer *Menge M* versteht man die gedankliche Zusammenfassung von Objekten mit bestimmten, voneinander unterscheidbaren Eigenschaften. Die zu einer Menge gedanklich zusammengefaßten Objekten mit bestimmten Eigenschaften nennt man *Elemente* der Menge. *Menge M* *Element*

Anmerkung: Der Begriff Element einer Menge ist sehr weitreichend. Er kann sich auf Lebewesen (Menge der Säugetiere), auf Gegenstände (Menge der Geräte zur Holzbearbeitung), auf Ereignisse (Menge der Regentage), auf sprachliche Gebilde (Menge der Eigenschaftswörter), auf Zahlen (Menge der ganzen Zahlen), u.s.w. beziehen.

Unter: bestimmten Elementen einer Menge versteht man: Es muß feststehen, welche Elemente zur Menge gehören, und welche nicht. Die Menge der "dicken Bücher" ist keine Menge, da die Eigenschaft "dick" zu keiner eindeutigen Bestimmung der Elemente dieser Menge führt. Die Menge der "dicken Bücher mit mehr als 200 Seiten" ist dagegen sehr wohl eine Menge.

Weiterhin verlangt man: Die Elemente der Menge müssen unterscheidbar sein. Ein "Haufen Einser" ist keine Menge, wenn man die einzelnen gleichnamigen Zahlen nicht aufgrund weiterer Eigenschaften unterscheiden kann.

1.2 DARSTELLUNG VON MENGEN

Eine Menge M kann man auf verschiedene Arten darstellen. Man unterscheidet die aufzählende und beschreibende Darstellung von Mengen.

AUFZÄHLENDE DARSTELLUNG VON MENGEN

Bei der aufzählenden Schreibweise werden die Elemente der Menge einzeln "aufgezählt".
Betrachtet man z.B. die Menge der natürlichen Zahlen von 1 bis 6, so schreibt man:

$M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\qquad M = \{\ldots\}$

Man könnte M auch in der Form schreiben:

$M = \{6, 4, 3, 1, 2, 5\}$

Beachte: Zwei Mengen sind *gleich*, wenn alle ihre Elemente gleich sind. *Gleichheit von Mengen*
Bei der Aufzählung ist also die Reihenfolge der Elemente *beliebig*.

Um auszudrücken, daß ein bestimmtes Element zu einer Menge M gehört, verwendet man das Zeichen $\in$.

$3 \in M$ bedeutet: 3 ist Element der Menge M $\qquad 3 \in M$

also: $4 \in M$, wenn $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

oder

$a \in M$, wenn $M = \{a, b, c, d, e\}$

Besteht eine Menge aus sehr vielen Elementen, die man nicht alle aufzählen will oder kann, so schreibt man:

$M = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Die drei Punkte sollen andeuten, daß die Aufzählung der Elemente der Menge nicht abgeschlossen ist.

Die Menge der ganzen Zahlen läßt sich in aufzählender Schreibweise darstellen als

$M = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Die Aufzählung der Elemente der Menge M ist demnach in beiden Richtungen nicht abgeschlossen.

BESCHREIBENDE DARSTELLUNG VON MENGEN

Im Gegensatz zur aufzählenden Darstellung, bei der die Elemente der Menge aufgezählt werden, wird bei der beschreibenden Darstellung diejenige Eigenschaft aller Elemente der Menge M angegeben, nach der die Elemente eindeutig bestimmt werden können.

Eine solche Eigenschaft ist z.B. :

"Zur Menge M sollen alle positiven ganzen Zahlen als Elemente gehören, die ein Vielfaches der Zahl 3 darstellen."

Aufgrund dieser Vorschrift erhält man die Elemente dieser Menge M

$M = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

Verändert man die Vorschrift, denen die Elemente der obigen Menge M genügen müssen, in folgender Weise:

"Zur Menge A sollen alle ganzen Zahlen als Elemente gehören, die ein Vielfaches der Zahl 3 darstellen,"

so erhält man folgende Elemente von A

$A = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$,

da diesmal auch negative ganze Zahlen durch die Vorschrift nicht ausgeschlossen wurden.

Die beschreibende Darstellung einer bestimmten Menge M verlangt also nicht nur eine eindeutige Beschreibung der Eigenschaft der Elemente dieser Menge (z.B. "Vielfaches der Zahl 3"), sondern auch die Angabe der Menge, aus der die Elemente von M ausgesondert werden sollen (z.B. "alle ganzen Zahlen", oder "alle positiven ganzen Zahlen").

Die Menge, aus der die Elemente einer bestimmten Menge M aufgrund einer Vorschrift ausgesondert werden, nennt man *Grundmenge G.* *Grundm*

Betrachten wir als weiteres Beispiel die Menge "aller natürlicher Zahlen kleiner als 3", so erhält man

$A = \{1, 2\}$,

da als Grundmenge G die *Menge der natürlichen Zahlen* angegeben wurde.

Dagegen führt die Vorschrift "alle ganzen Zahlen kleiner als 3" zur Menge

$B = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$,

da diesmal als Grundmenge G die *Menge der ganzen Zahlen* angegeben wurde.

Im Bereich der Zahlen gibt es einige wichtige Mengen, die immer wieder als Grundmengen gewählt werden:

Die *Menge der natürlichen Zahlen* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ $\qquad \mathbb{N}$

Die *Menge der ganzen Zahlen* $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ $\qquad \mathbb{Z}$

Die *Menge der rationalen Zahlen* $\mathbb{Q} = \{$Menge aller positiven und negativen Brüche und Null$\}$ $\qquad \mathbb{Q}$

Die Menge A "aller natürlichen Zahlen kleiner als 3" läßt sich kurz und eindeutig beschreiben durch

$A = \{x | x \text{ kleiner } 3 \text{ und } x \in \mathbb{N}\}$

oder noch kurzer:

$A = \{x / x \text{ ist kleiner } 3\}_{G = \mathbb{N}}$

(Lies: Die Menge A enthält alle Elemente x der Grundmenge $G = \mathbb{N}$, die die Bedingung erfüllen, x kleiner 3.)

Der Buchstabe x steht für alle Elemente der Grundmenge G, die die mengenbildende Vorschrift für A erfüllen. Man nennt daher x einen Platzhalter für die Elemente von A. Die einzelnen Elemente von A bestimmt man nun so, daß man für jedes Element von G überprüft, ob die Aussage "Element von G ist kleiner 3" wahr ist. In obigem Beispiel ist

$G = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Setzt man das erste Element von G an die Stelle des Platzhalters x, so erhält man die wahre Aussage:

"1 ist kleiner als 3".

Die Zahl 1 ist also Element von A.

Setzt man das nächste Element von G an die Stelle des Platzhalters x, so erhält wiederum eine wahre Aussage.

"2 ist kleiner als 3"

Die Zahl 2 ist also auch Element von A.

Das nächste Element von G führt dagegen zu der falschen Aussage:

"3 ist kleiner als 3"

Die Zahl 3 ist demnach kein Element von A.

Aus der beschreibenden Darstellung von A

$A = \{x | x \text{ ist kleiner als } 3\}_{G = \mathbb{N}}$

gelangt man nach obigem Verfahren zur aufzählenden Darstellung:

$A = \{1, 2\}$

Die Menge B "aller ganzen Zahlen, die kleiner als 3 sind" läßt sich dann schreiben:

$B = \{y | y \text{ ist kleiner als } 3\}_{G = \mathbb{Z}}$

Diesmal haben wir den Buchstaben y als Platzhalter für die Elemente von B gewählt. Wir hätten auch andere Buchstaben oder Zeichen benutzen können (z.B.: a,b, k, l, u, γ, $\varkappa$, ...) Im Folgenden werden wir meist die Buchstaben x und y als Platzhalter verwenden.

Im folgenden Beispiel ist die Menge M "aller natürlichen Zahlen, die ein Vielfaches von 3 sind" in beschreibender und aufzählender Schreibweise dargestellt:

$M = \{x | x \text{ ist Vielfaches von } 3\}_{G = \mathbb{N}}$

und

$M = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$

Der Unterschied zwischen der aufzählenden und beschreibenden Darstellung von Mengen ist:

Bei der aufzählenden Schreibweise werden die Elemente der Menge einzeln aufgezählt. Die Angabe der Grundmenge ist nicht notwendig.
Bei der beschreibenden Darstellung dagegen müssen die Eigenschaften der Elemente der Menge eindeutig angegeben werden, die allen Elementen der Menge gemeinsam sein sollen (z.B. "x soll Vielfaches der Zahl 3 sein").
Weiterhin ist die Angabe der Grundmenge G notwendig, aus der die Elemente der Menge mit bestimmten Eigenschaften ausgesondert werden sollen.
Während bei der aufzählenden Darstellung also sofort die Elemente der Menge angebbar sind, müssen sie bei der beschreibenden Darstellung aufgrund einer gegebenen Vorschrift erst ermittelt werden.

1.3 TEILMENGE

Eine Menge A nennt man *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element von A zugleich auch Element von M ist. *Teilmenge*

Die Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ist eine Teilmenge der Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Auch jede Menge M ist Teilmenge ihrer Grundmenge G.

2. PAARMENGEN

2.1 GEORDNETE PAARE

Im ersten Kapitel haben wir gelernt, was eine Menge, Grundmenge, Teilmenge ist und wie man sie darstellen kann. Dabei haben wir uns auf solche Mengen beschränkt, deren Elemente aus einzelnen Objekten, Zahlen bestehen. Durch sogenannte *Paarbildung* können jedoch aus den Elementen zweier Mengen A und B neue Elemente gebildet werden. Diese nennt man *geordnete Paare*.

Ist $x \in A$ und $y \in B$, so nennt man den Ausdruck (x/y) ein *geordnetes Paar* von Elementen aus A und B. *geordnetes Paar (x/y)*

Gegeben seien die Mengen

$A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c\}$

Ein geordnetes Paar von Elementen aus A und B ist z.B.:

$(1|a)$ oder $(2|b)$ oder $(3|a)$

Die beiden Elemente eines geordneten Paares nennt man die *Komponenten*. Man spricht von *erster* Komponente und *zweiter* Komponente.

Die erste Komponente des geordneten Paares $(\square|4)$ ist die symbolische Figur $\square$, die zweite Komponente die Zahl 4.

Anmerkung: geordnet bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Elemente eines Paares ankommt. Dabei soll die erste Komponente eines geordneten Paares stets ein Element der zuerst genannten Menge, die zweite Komponente stets ein Element der zuletzt genannten Menge sein.
Bezüglich der obigen Mengen A und B ist das Paar $(a|1)$ kein geordnetes Paar, da a kein Element von A ist.

Zwei geordnete Paare $(x|y)$ und $(u|v)$ sind *gleich*, wenn $x = u$ und $y = v$ ist. *Gleichheit von geordneten Paaren*

Das Paar $(3|4)$ ist deshalb verschieden von dem Paar $(4|3)$.

Man kann auch diese geordneten Paare als Elemente einer Menge auffassen, die man Paarmenge nennt.

2.2 PAARMENGE

Eine *Paarmenge* bezüglich zweier Mengen A und B ist eine *Menge von geordneten Paaren* aus A und B. *Paarmenge*

Gegeben seien die Mengen

$A = \{a, b, c, d\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$

Eine Paarmenge M bezüglich der Mengen A und B ist z.B.:

$M = \{(a|1), (a|3), (b|2)\}$

oder

$P = \{(d|1), (d|2), (d|3), (a|2)\}$

Häufig sind in der Mathematik die Mengen A und B gleich:

$A = \{1, 2, 3\} = B$

Eine Paarmenge bezüglich dieser zwei gleichen Mengen ist z.B.:

$P = \{(1|1), (1|2), (2|1), (2|2)\}$

Ebenso wie bei Mengen aus einzelnen Objekten ist auch bei Paarmengen eine Grundmenge angebbar. Für jede Paarmenge bezüglich zweier Mengen A und B besteht die Grundmenge aus allen geordneten Paaren aus A und B, Produktmenge genannt.

2.3. PRODUKTMENGE

Die *Produktmenge* $A \times B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller geordneten Paare aus A und B. *Produktmenge* $A \times B$

Die Produktmenge A x B der Mengen

$A = \{1, 2\}$ und $B = \{u, v, w\}$

ist gegeben durch

$A \times B = \{(1|u), (1|v), (1|w), (2|u), (2|v), (2|w)\}$

Eine Paarmenge P bezüglich A und B ist z.B.:

$P = \{(1|u), (2|u), (2|w)\}$

Beachte: Jede Paarmenge bezüglich A und B ist eine Teilmenge von A x B.

Wie wir schon bei Paarmengen festgestellt haben, sind in der Mathematik die Mengen A und B häufig gleich.

$A = \{1,2\} = B$

Die Produktmenge A x B ist dann

$A \times B = \{(1|1), (1|2), (2|1), (2|2)\}$

Beachte: Der Unterschied zwischen einer Paarmenge und einer Produktmenge zweier Mengen A und B liegt darin, daß eine Produktmenge alle geordneten Paare von A und B enthält, während eine Paarmenge stets nur eine Teilmenge der Produktmenge darstellt.

3. RELATION

3.1 EINFÜHRUNG DES RELATIONSBEGRIFFS

In Kapitel 2 haben wir gelernt, wie man aus den Elementen zweier Mengen durch Paarbildung eine Menge geordneter Paare bilden kann. Dabei wurde noch nicht darüber gesprochen, aufgrund welcher Vorschrift eine Paarbildung erfolgt, sonder nur der Vorgang der Paarbildung an willkürlichen Beispielen gezeigt. Nun wollen wir uns noch mit solchen Paarmengen beschäftigen, bei denen die Elemente der geordneten Paare in einem bestimmten Zusammenhang zueinander stehen. Solche Paarmengen nennt man *Relationen*.

Eine *Relation* bezüglich zweier Mengen A und B wird durch eine Zuordnungsvorschrift beschrieben, die Elementen von A bestimmte Elemente von B zuordnet. *Relation*

Beispiel:
Gegeben seien die Mengen

$A = \{\square, \triangle, \triangleright, \bigcirc\}$ und $B = \{1, 2, 3, \ldots\}$

und die Zuordnungsvorschrift:
"Jedem Element $x \in A$ (Figur) soll ein $y \in B$ (Zahl) so zugeordnet werden, daß y die Zahl der Ecken von x richtig wiedergibt."

Obige Zuordnungsvorschrift führt zur folgenden Paarmenge

$P = \{(\square|4), (\triangle|3), (\triangleright|3), (\bigcirc|5)\}$

Alle übrigen Paare $(x|y)$ aus $A \times B$ erfüllen obige Bedingungen nicht. Z.B. ist das Paar $(\square|1)$ kein geordnetes Paar der Relation, da dem Viereck eine fal- [illegible]

Beachte: Bei einer Relation werden den Elementen $x \in A$ nur solche Elemente $y \in B$ zugeordnet, die die Zuordnungsvorschrift erfüllen.

[illegible]

Gegeben sind die folgenden zwei gleichen Mengen

$A = \{1, 2, 3\} = B$

und die Zuordnungsvorschrift:
"Jedem $x \in A$ soll ein $y \in B$ so zugeordnet werden, daß x kleiner als y ist."

Zur Relation gehören dann folgende Paare $(x|y)$:

$P = \{(1|2), (1|3), (2|3)\}$

Alle übrigen Paare $(x|y)$ aus $A \times B$ erfüllen obige Bedingungen nicht. Z.B. erfüllt das Paar $(3|2)$ nicht [illegible] Zuordnungsvorschrift "x kleiner als y", da die Zahl 3 größer als 2 ist.

[illegible]

[illegible] haben wir zwei Formen der Darstellung von Relationen kennengelernt:

[illegible] als *aufzählende* Form die *Paarmengenschreibweise:*

[illegible]

[illegible] als *beschreibende* Form die Angabe der Mengen A und B und die Zuordnungsvorschrift:

$A = \{\ldots\}$ und $B = \{\ldots\}$

[illegible] ft: "Ordne jedem $x \in A$ ein $y \in B$ so zu, daß ..."

[illegible] weitere *aufzählende* Darstellungen werden wir nun die *Wertetabelle* und das *Pfeildiagramm* kennenlernen.

WERTETABELLE

Gegeben sei folgende Relation:

$A = \{2, 3, 4, 6\}$ und $B = \{1, 4\}$

und die Vorschrift: "Ordne jedem $x \in A$ ein $y \in B$ so zu, daß y ein Teiler von x ist."

Zur Relation gehören dann folgende Paare $(x|y)$:

$P = \{(2|2), (4|2), (4|4), (6|2)\}$

Ordnet man die zugehörigen Elemente der Relation nicht nebeneinander, sondern <u>übereinander</u> an, so erhält man eine *Wertetabelle*.

P:

x	2	4	4	6
y	2	2	4	2

Beachte: In der oberen Reihe einer Wertetabelle stehen definitionsgemäß nur Elemente $x \in A$, in der unteren Reihe nur Elemente $y \in B$.

PFEILDIAGRAMM

Neben der Paarmengendarstellung und Wertetabelle ist das *Pfeildiagramm* eine wichtige Darstellungsart von Relationen [illegible] weil die Zuordnung der Elemente [illegible] dargestellt werden kann. Graphische Darstellungen sind aber häufig übersichtlicher als Tabellen. Das wollen wir an folgendem Beispiel demonstrieren.

Gegeben seien die Mengen

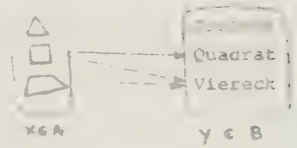
$A = \{\triangle, \square, \text{⬠}\}$ und $B = \{\text{Dreieck, Quadrat, Viereck}\}$

und die Zuordnungsvorschrift: "Ordne jeder Figur $x \in A$ einen Begriff $y \in B$ so zu, daß der Begriff y in der richtigen Weise benutzt wird."

Wertetabelle:

x	△	□	⬠	[illegible]
y	Dreieck	Quadrat	Viereck	[illegible]

Pfeildiagramm



Beim *Pfeildiagramm* werden <u>alle</u> Elemente beider Mengen A und B graphisch dargestellt. Die in Beziehung stehenden Elemente von A und B werden durch Pfeile gekennzeichnet. Vereinbarungsgemäß beginnen die Pfeile bei den Elementen x der zuerst genannten Menge A und enden auf den zugeordneten Elementen $y \in B$.

Pfeildiagramm

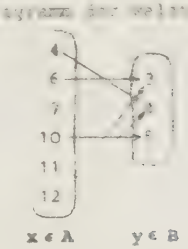
Beispiel: Gegeben seien die Mengen

$A = \{4, 6, 7, 10, 11, 12\}$ und $B = \{3, 4, 5\}$

und die Vorschrift "x ist ein Vielfaches von y".

Wertetabelle und Pfeildiagramm der Relation

x	4	6	10	12	12
y	4	3	5	3	4



Beachte: Während in Wertetabellen und Paarmengenschreibweisen nur die Elemente von A und B dargestellt werden, die Elemente geordneter Paare der Relation sind, werden im Pfeildiagramm alle Elemente von A und B dargestellt. Man erkennt dadurch sofort, welche Elemente von A und B nicht Elemente geordneter Paare darstellen.

BESCHREIBENDE PAARMENGENDARSTELLUNG:

In der Mathematik sind die Zuordnungsvorschriften häufig durch einen mathematischen Ausdruck darstellbar. In diesem Fall kann man Relationen sehr kurz durch die *beschreibende Paarmengendarstellung* festlegen.

Beispiel: Die Relation sei bestimmt durch die Zahlmengen

$A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$

und die Vorschrift "$x \in A$ ist kleiner als $y \in B$."

Führt man für den Begriff "kleiner" das Symbol $<$ ein, so kann man obige Relation darstellen durch

$P = \{ (x|y) \mid x < y \}_{A \times B}$

$P = \{(1|2|3 \ldots\}_{A \times B}$

Statt $A \times B$ kann man in diesem Fall für A und B die Zahlmengen $\mathbb{N}$ einsetzen

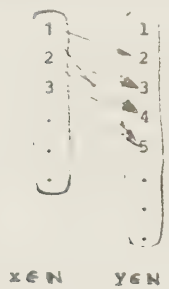
$P = \{ (x|y) \mid x < y \}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Lies: Die Relation ist eine Paarmenge aus der Grundmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, deren geordnete Paare $(x|y)$ die Bedingung $x < y$ erfüllen sollen.

Wertetabelle:

x	1	1	1	1	...	2	2	2	...	3	3	...	...
y	2	3	4	5	...	3	4	5	...	4	5	...	...

Pfeildiagramm:



Beachte: Sowohl mit der Wertetabelle als auch mit dem Pfeildagramm können nur Teilmengen der Relation dargestellt werden, da diese aus unendlich vielen geordneten Paaren der Produktmenge $A \times B$ besteht.
Nur beschreibende Darstellungsarten sind in der Lage, auch solche Relationen mit unendlich vielen geordneten Paaren eindeutig festzulegen, die wegen ihrer großen Zahl der Elemente in aufzählender Form nicht mehr vollständig wiedergebbar sind.

Bei dem folgenden Beispiel ist die Zuordnungsvorschrift der Relation als *Rechenausdruck* angegeben:

$P = \{(x|y) \mid x + y = 5\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Die Relation besteht demnach aus allen geordneten Paaren $(x|y)$ aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, für die gilt $x + y = 5$

Wertetabelle:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1

Pfeildiagramm:

Damit wollen wir das Kapitel der allgemeinen Relationen und ihre verschiedenen Darstellungen abschließen. Bevor wir uns speziellen Relationen, Funktionen genannt, zuwenden, sollen noch einmal die wichtigsten Inhalte der vergangenen Kapitel wiederholt werden:

1. Eine Relation zwischen den Mengen A und B ist eine Teilmenge von geordneten Paaren $(x|y)$ aus $A \times B$, wobei bestimmten Elementen $x \in A$ Elemente $y \in B$ aufgrund einer Vorschrift zugeordnet werden.

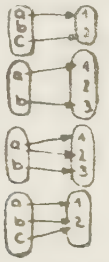
   Dabei können folgende Fälle auftreten:

   a. nicht alle Elemente x der Menge A sind Elemente eines geordneten Paares:

   b. nicht alle Elemente y der Menge B sind Elemente eines geordneten Paares:

   c. einem Element $x \in A$ können mehrere $y \in B$ zugeordnet werden:

   d. mehreren Elementen $x \in A$ ist nur ein $y \in B$ zugeordnet:



2. Darstellung von Relationen.
Wir unterscheiden die <u>aufzählende</u> und <u>beschreibende</u> Darstellung:

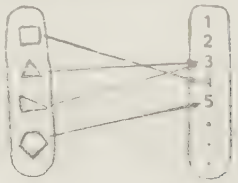
a. <u>aufzählende</u> Darstellungen sind solche, bei denen die Elemente der geordneten Paare einer Relation aus der Darstellung direkt entnommen werden können. Wir haben die *Paarmengenschreibweise*, *Wertetabelle* und das *Pfeildiagramm* kennengelernt:

Paarmengen-
schreibweise: P: $\{(\square,4),(\triangle|3),(\triangleright|3),(\diamond|5)\}$

Wertetabelle: f:

x	□	△	▷	◇
y	4	3	3	5

Pfeildiagramm:



Bemerke: <u>aufzählende</u> Darstellungen sind nur möglich, wo die zugeordneten Elemente von Paaren der Relation bekannt sind.
In der Regel können nur Teilmengen geordneter Paare einer Relation dargestellt werden.

b. <u>beschreibende</u> Darstellungen sind solche, bei denen die Grundmenge A×B der Relation und eine Vorschrift angegeben ist, mit deren Hilfe man <u>alle</u> geordneten Paare der Relation bestimmen kann. Eine beschreibende Darstellung kann stets in eine aufzählende Darstellung überführt werden. Wir haben die *wörtliche Darstellung* und die *beschreibende Paarmengendarstellung* kennengelernt:

wörtliche beschreibende Darstellung:

gegeben $A = \{\square,\triangleright,\triangle,\diamond\}$

$B = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}$

und die Vorschrift: "Ordne jedem x∈A ein y∈B so zu, daß y die Zahl der Ecken von x angibt."

beschreibende Paarmengendarstellung:

$P = \{(x|y)|\ x + y = 5\}_{M \times N}$

Die beschreibende Paarmengendarstellung kann nur dort angewandt werden, wo es sich um eine Relation zwischen <u>zwei Zahlmengen</u> A und B handelt, deren Zuordnungsvorschrift als <u>Rechenausdruck</u> angebbar ist.

4. Funktion

In den nun folgenden Kapiteln wollen wir uns noch mit einem sehr speziellen Typ einer Relation, *Funktion* genannt, beschäftigen, der weit über die Mathematik hinaus von großer Bedeutung ist. Wichtigstes Merkmal einer Funktion ist der eindeutige Zusammenhang zwischen den Elementen x∈A und den zugeordneten y∈B.

Funktion f

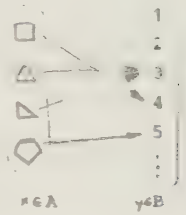
Eine *Funktion f* ist eine spezielle Relation, bei der *jedem* Element x∈A *genau ein* y∈B zugeordnet ist.

Durch diese Definition werden Relationen ausgeschlossen, bei denen einem Element x∈A *mehr als* ein y∈B oder *gar kein* Element y∈B zugeordnet werden. Diese Bedingungen lassen sich im Pfeildiagramm anschaulich darstellen:

Beispiel einer Funktion f:

"Ordne jedem x∈A (Figur) ein y∈N so zu, daß y die Zahl der Ecken der Figur wiedergibt."

Beachte: Von jedem x∈A geht genau ein Pfeil aus, so daß jeder Figur eindeutig eine bestimmte Eckenzahl zugeordnet werden kann.

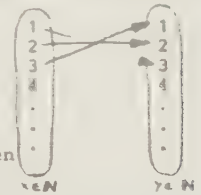


Die folgenden Beispiele stellen <u>keine</u> Funktionen dar:

a. "Ordne jedem x∈N ein y∈N so zu, daß gilt:

x+y = 4

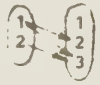
Beachte: Diese Relation ist <u>keine</u> Funktion, da nicht jedem x∈N ein y∈N zugeordnet werden kann. (z.B. x=4)



Allerdings wäre diese Relation eine Funktion, wenn man statt A = N A = {1,2,3} annimmt!

b. "Ordne jedem $x \in A$ ein $y \in B$ so zu, daß gilt : $x < y$

Beachte: Diese Relation ist keine Funktion, da dem Element $x=1$ mehr als ein $y \in B$ zugeordnet wird.



$x \in A$ $y \in B$

Häufig verwendet man statt des Begriffs "Funktion" auch den Begriff *Abbildung*.
Zur Darstellung der speziellen Relation "Funktion" können wir die früher gelernten aufzählenden und beschreibenden Darstellungsweisen für Relationen anwenden. Allerdings sind bei Funktionen einige neue Sprech- und Schreibweisen üblich, die wir kurz einüben wollen:

a. Eine Funktion wird häufig durch einen *Kleinbuchstaben* bezeichnet. Allerdings ist diese Schreibweise nicht einheitlich. So können z.B. die folgenden Buchstaben ebenfalls eine Funktion kennzeichnen: g, h, F, G, φ, θ, ...
Wir werden vorwiegend das Symbol f für die Kennzeichnung einer Funktion verwenden.

b. Die Menge der Elemente, denen aufgrund einer Zuordnungsvorschrift ein $y \in B$ zugeordnet werden kann, nennt man *Argumentmenge* oder *Definitionsbereich D* der Funktion. Man sagt: Die Funktion ist nur erklärt(definiert) bezüglich der Elemente der Menge D. *Argumentmenge Definitionsbereich D*

c. Die Menge aller Elemente $y \in B$, die den Elementen des Definitionsbereichs D der Funktion zugeordnet werden, nennt man den *Wertebereich W* oder *Bildmenge* der Funktion. *Wertebereich Bildmenge*

Erläuterung der Begriffe Definitions- und Wertebereich:

Gegeben sei folgende Relation bezüglich $A = \mathbb{N}$ und $B = \mathbb{N}$

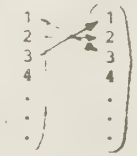
$P = \{(x|y) \mid x+y=4\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

Wertetabelle:

P:

x	1	2	3
y	3	2	1

Pfeildiagramm:



$A = \mathbb{N}$ $B = \mathbb{N}$

Der Definitonsbereich D der obigen Relation ist eine Teilmenge von A, da nur den Elementen 1,2,3 ein $y \in B$ zugeordnet werden kann; also $D = \{1,2,3\}$.

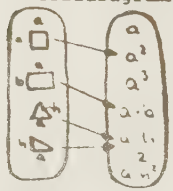
Wie schon festgestellt, wird obige Relation zur Funktion, wenn man schreibt

$f = \{(x|y) \mid x+y=4\}_{D \times \mathbb{N}}$ für $D = \{1,2,3\}$

Der Wertebereich W enthält dagegen nur die Elemente von B, die Elemente von geordneten Paaren darstellen; also $W = \{1,2,3\}$.

Gegeben sei folgende weitere Funktion f: "Ordne jedem Element $x \in D$ (Figur) ein Formelausdruck $y \in B$ so zu, daß y die Fläche der Figur richtig wiedergibt."

Pfeildiagramm:



$x \in D$ $y \in B$

Wertetabelle:

x	□	▭	△	◺
y	a^2	$a \cdot b$	$\frac{a \cdot h}{2}$	$\frac{a \cdot h}{2}$

Der *Definitonsbereich D* der Funktion ist die Menge $D = \{\square, \square, \triangle, \triangle\}$.

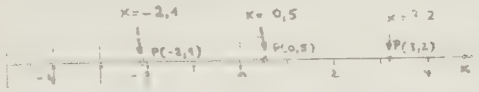
Der *Wertebereich W* der Funktion ist dagegen nur eine Teilmenge von B. W enthält alle Elemente $y \in B$, die Elemente von geordneten Paaren von f darstellen:

$W = \{a^2, a \cdot b, \frac{a \cdot h}{2}\}$.

Unsere bisherigen Überlegeungen bezogen sich stets auf sehr unterschiedliche Objekte(Figuren, Zahlen, Formeln, u.s.w.). Der weitaus größte Teil der in der *Mathematik* betrachteten Funktionen stellen Zuordnungen zwischen *zwei Zahlmengen* dar. Solche Abbildungen von einer Zahlmenge A auf eine zweite Zahlmenge B werden als *reelle Funktionen* bezeichnet. Im Folgenden wollen wir uns nur noch mit diesen reellen Funktionen beschäftigen. Für diese werden wir nun zwei weitere, wichtige Darstellungen lernen; die *graphische* Darstellung im *Koordinatensystem* und das *vereinfachte Pfeildiagramm*. *reelle Funktio*

4.1 KOORDINATENSYSTEM

Das *Koordinatensystem* ist ein Hilfsmittel zur graphischen Darstellung von geordneten Zahlenpaaren. Sie haben sicher früher die *Zahlengerade* als Hilfsmittel zur Darstellung der *Menge der rationalen Zahlen* kennengelernt. Dabei wurde jedem $x \in \mathbb{Q}$ *eindeutig ein Punkt P (x) auf der Zahlengeraden zugeordnet:*



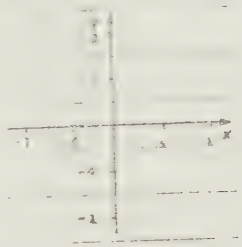
Zahlengerade

Eine reelle Funktion stellt aber eine Zuordnung von Elementen zweier Zahlenmengen dar, so daß wir für eine Darstellung der Elemente beider Mengen D und W jeweils eine Zahlengerade benötigen:

Darstellung zweier Zahlenmengen auf zwei Zahlgeraden

Schon um 1600 kam der Mathematiker R.DESCARTES auf den Gedanken, die Zahlengeraden für D und W *senkrecht* zueinander anzuordnen.

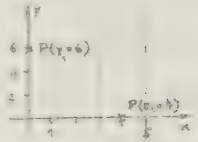
Dabei ist es heute üblich:



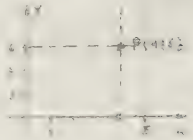
1. Die Elemente $x \in D$ auf der waagrechten Achse, *Abszisse genannt*, die Elemente $y \in W$ auf der senkrechten Achse, *Ordinate genannt*, darzustellen. — *Abszisse (x)* — *Ordinate (y)*
2. Die Achsen werden mit den Symbolen der Elemente (x und y) von D und W gekennzeichnet.
3. Die *Nullpunkte beider Zahlengeraden* werden häufig aufeinander gelegt und bilden den *Ursprung* des Koordinatensystems. — *Ursprung*
4. Die *positive Zählrechnung* der Achsen wird mit einem Pfeil gekennzeichnet.
5. Wenn es die Aufgabenstellung zuläßt, werden die *Einheiten* auf den Achsen gleich gewählt.

Damit haben wir aber erst die Möglichkeit, die Elemente zweier Zahlmengen als Punkte auf den entsprechenden Achsen darzustellen. Zur Darstellung von geordneten Paaren kommen wir, wenn wir folgende Vorschrift anwenden:

Ist das *Bild* eines bestimmten geordenten Paares $(x_1|y_1)$ gesucht (z.B. $(x_1|y_1)=(4|6)$), so suche man zuerst die Punkte $P(x_1)$ und $P(y_1)$ auf den zugehörigen Achsen.



Zeichne dann durch beide Punkte Parallelen zu jeweils eine der beiden Achsen. Der Schnittpunkt beider Parallelen wird als *Bildpunkt* $P(x_1|y_1)$ des Paares $(x_1|y_1)$ bezeichnet.



Bildpunkt $P(x_1|y_1)$

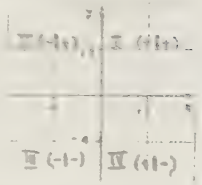
Durch diese Vorschrift kann jedem geordneten Paar *eindeutig* ein Punkt zugeordnet werden. Umgekehrt kann aber auch jedem Punkt *eindeutig* ein geordnetes Paar von zwei Zahlen zugeordnet werden.

Die Werte x_1 und y_1 werden als *Koordinaten* des Punktes $P(x_1|y_1)$ bezeichnet.

Wichtig ist noch, daß die Achsen des Koordinatensystems die Zeichenebene in 4 Teile, in sogenannte *Quadranten*, zerlegt.

Quadranten

Dabei liegen im I.Quadranten, nur Punkte, deren Koordinaten *positiv* sind, im III. Quadranten nur Punkte, deren Koordinaten *negativ* sind.
Im II. und IV. Quadranten ist jeweils eine Koordinate eines Punktes *positiv*, eine *negativ*.



Die Numerierung der Quadranten erfolgt gegen den Uhrzeigersinn!

● Ein Platzhalter wird mit einem Index versehen, wenn man ein bestimmtes, zahlenmäßig aber noch nicht festgelegtes Element darstellen will.

Damit haben wir das Hilfsmittel *Koordinatensystem* zur Darstellung geordneter Paare einer Funktion kennengelernt. Nun müssen wir noch lernen, wie man es benutzt.

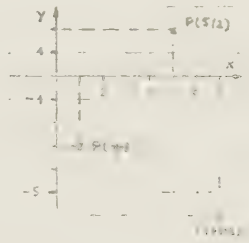
Dazu betrachten wir folgendes Beispiel einer reellen Funktion:

B.1: Gegeben sei die Funktion

f:

x	1	5	7
y	-3	2	-6

Der Graph der Funktion

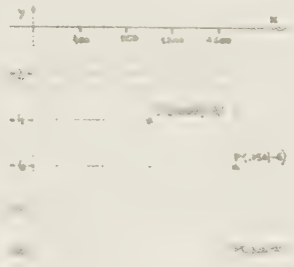


B.2: Gegeben sei die Funktion

f:

x	500	750	1750
y	-4	-15	-6

Der Graph der Funktion



Wie Sie sehen, haben wir bei den vorliegenden Beispielen keine symmetrischen *Achsenkreuze* gezeichnet, sondern im wesentlichen nur den *Ausschnitt*, in dem die Punkte der Funktionen liegen.
Im Beispiel B.2 sind die beiden *Maßstäbe* der Achsen nicht gleich.

Das bedeutet für uns aber: Bevor wir eine Funktion graphisch in einem Koordinatensystem darstellen können, muß man vorher eine Entscheidung treffen, welchen *Ausschnitt* und welchen *Maßstab* man am besten verwendet. Hierfür gibt es kein eindeutiges Rezept. Die Vorgehensweise ist also schwer zu vermitteln. Wer aber häufig gezwungen ist, Funktionen zu zeichnen, wird schnell dahinterkommen, wie man es macht. Wir beginnen mit der Wahl des Ausschnitts.

WAHL DES AUSSCHNITTS

Betrachten wir noch einmal das Beispiel B.1. Angenommen wir hätten nichts über Möglichkeit der Ausschnittswahl gewußt, so hätten wir die Funktion in einem symmetrischen Koordinatensystem dargestellt (s.Abb. rechts).

Wir sehen, daß im II. und III. Quadranten keine Punkte der Funktion f liegen. Für die Darstellung der Funktion würde es also völlig genügen, die x-Achse im Bereich x = 1 bis x = 7 darzustellen (kurz: $x \in [1;$ und die y-Achse für den Bereich $y \in [-6; 2]$ zu zeichnen.

Der Übersicht halber erweitert man den Ausschnitt so, daß der Ursprung des Koordinatensystems miteinbezogen wird. Auf diese Weise gelangt man zum Ausschnitt in B.1, der wesentlich weniger Platz bei entsprechendem Maßstab benötigt als das symmetrische Achsenkreuz!

Wie kann man nun anhand der Wertetabelle einer Funktion entscheiden, welchen Ausschnitt man wählt?

Hierzu folgendes Verfahren:

1. Man schreibt sich den darzustellenden Bereich für $x \in D$ und $y \in W$ hin:

   Für B.1 gilt: $x \in [1; 7]$ und $y \in [-6; 2]$

   Mit etwas Übung erkennt man, daß alle Punkte der Funktion f positive x-Koordinaten und negative oder positive y-Koordinaten haben. Demnach müssen alle Punkte der Funktion im I. und IV. Quadranten liegen, da nur dort solche Punkte mit positiven x- und negativen/positiven y-Koordinaten liegen können.

Aus Gründen der Übersicht soll der Ursprung (Nullpunkt) des Koordinatensystems im Ausschnitt enthalten sein. ⇒

2. Wir untersuchen die Bereiche für x und y, ob sie [illegible]

Für den x-Bereich [1; 7] trifft das nicht zu, da dieser Bereich die Null nicht enthält. Deshalb erweitert man den darzustellenden Bereich für die x-Achse auf [o; 7].

Den y-Bereich [-6; 2] brauchen wir nicht erweitern, da er die Null enthält.

Deshalb wurde folgender Ausschnitt bei B.1 gewählt:

Für die x-Achse: [o; 7] (der y-Achse: [-6; 2]

Für Beispiel B.2 läuft das Verfahren analog:

Bereich: D= [1ooo; 175o] und W= [-1o;-4]

Beide Bereiche enthalten nicht die Null. Deshalb erweitern wir sie auf

[o; 175o] für die x-Achse und [-1o; o] für die y-Achse

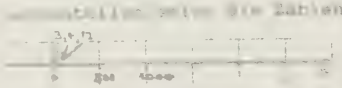
Wir brauchen also nur diesen Ausschnitt zur Darstellung der Funktion in B.2 zeichnen.

[illegible] den Teil des Koordinatensystems weglassen zu können, in dem sich keine Punkte des Graphens einer Funktion befanden!

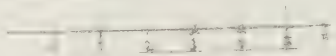
WAHL DER MASSTÄBE BEIDER ACHSEN

Schon bei der Darstellung von Zahlen als Punkte auf einer Zahlengerade war es notwendig, den Maßstab der Zahlengerade den darzustellenden Zahlenwerten anzupassen. Wählt man den Maßstab zu klein, so kann man die zugehörigen Punkte der Zahlenwerte nicht mehr gut darstellen, wählt man den Maßstab zu groß, so können nicht alle vorgegebenen Zahlen als [illegible]

[illegible] die Zahlen [illegible]



Maßstab zu klein; Punkte können nicht genau eingezeichnet werden!



Maßstab zu groß; der Punkt P(12) liegt nicht mehr [illegible]

Um den Maßstab zu bestimmen, muß man demnach die *Zeichenbarkeit der Punkte* und *die Größe der Darstellung* berücksichtigen.

Die Größe der Darstellung hängt normalerweise von dem zur Verfügung stehenden Millimeterpapier ab. Allerdings wählt man häufig viel kleinere Darstellungen, da der Aufwand im Verhältnis zum Zweck der Darstellung stehen sollte. Und für den Zweck der Veranschaulichung einer Funktion durch den Graphen genügt oft eine relativ kleine Darstellung, in diesem Lehrtext wurde für solche Abbildungen ein Platz von 5 cm x 5 cm vorgesehen.

Wenn wir also die Größe der Darstellung mit 5 cm x 5 cm als vorgegeben betrachten wollen, ist *der Maßstab nur* [illegible]

Wir wollen diese Aussage am Beispiel B.2 erläutern:

x	1ooo	17oo	175o
y	-4	-1o	-6

Wertetabelle der Funktion f

Daraus ergibt sich für D und W : D= [1ooo;175o] und W= [-1o;-4]

Aufgrund der Überlegungen über den darzustellenden Ausschnitt kamen wir zu den Bereichen

[o; 175o] für die x-Achse und [-1o; o] für die y-Achse

Diesen Bereich wollen wir nun möglichst günstig auf einer Achse von jeweils 5 cm Länge darstellen, da unsere Abbildung in beiden Richtungen nicht größer als 5 cm werden soll.

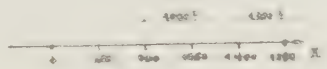
Verfahren zur Bestimmung des Maßstabes für die x-Achse:

[illegible] [o; 175o] für die x-Achse. Er erstreckt sich über 175o Einheiten (kurz: 175o E.) Man berechnet die Zahl der darzustellenden E. aus der Differenz von größtem x-Wert (175o) des Bereichs und kleinstem x-Wert des Bereichs (o). Also: 175o - o = 175o E.

Bei 5 cm Achsenlänge entspricht das einem Maßstab für die x-Achse von

175o E. = 35o E./cm (Lies: 35o Einheiten pro cm)

Dieser Maßstab würde bei gegebener Länge von 5 cm den Platz am günstigsten ausnutzen. Er hat nur einen Nachteil. Er ist *unpraktisch!* Die Werte x_1= 1ooo und x_2= 17oo sind nur mit großer Unsicherheit darstellbar. Versuchen Sie es einmal!



2. Schritt: Aus dem berechneten Maßstab bestimmt man den *praktischen Maßstab* nach folgenden Überlegungen:

Man prüft den berechneten Maßstab auf gute Teilbarkeit. Im obigen Beispiel erhielten wir durch Rechnung einen Maßstab von 35o E/cm. Dieser Maßstab ist, wie wir gesehen haben, unpraktisch. Besser ist ein vergrößerter Maßstab von 2oo E/cm oder ein verkleinerter Maßstab von 4oo E/cm. In diesen Maßstäben lassen sich die x-Werte 1ooo und 17oo gut darstellen. Da bei größerem Maßstab die Abbildung größer als 5cm 5cm würde, haben wir in B 2 den Maßstab 4oo E/cm gewählt.

Beachte: In der Regel sind die Maßstäbe 1E/cm, 2E/cm, 4E/cm, 5E/cm und 1oE/cm gut teilbar(praktisch). Ebenfalls das 1ofache 1oofache, 1ooofache dieser Maßstäbe; oder der 1ote Teil, 1oote Teil, 1ooote Teil.
Also: o,o1E/cm, o,o2E/cm,...,2oE/cm, 4oE/cm, 5oE/cm, 1ooE/cm, ...

Lassen Sie sich von diesen Überlegungen nicht zu sehr verwirren. Sie klingen recht kompliziert, werden aber nach kurzer Übung einsichtig und selbstverständlich.

Die Bestimmung des Maßstabes für die y-Achse der in B 2 dargestellten Funktion f verläuft ähnlich:

Bestimmung des Wertebereiches: $W = [-1o;\ -4]$

Nullpunkt enthalten? nein! : $\Rightarrow = [-1o;\ 0]$

Maßstab(berechnet) : $(0 - (-1o))/5 = 2$ E/cm

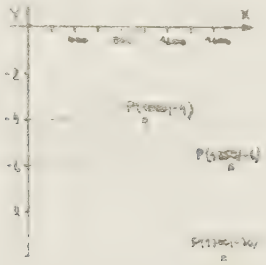
Maßstab praktisch? ja! : $\Rightarrow$ 2 E/cm

Daraus folgt ein Maßstab von 2 E/cm für die y-Achse in B 2.

Aufgrund obiger Überlegungen kamen wir deshalb für die Funktion f

x	1ooo	17oo	175o
y	-4	-1o	-6

zu nebenstehenden Graphen mit dem entsprechenden Ausschnitt und den jeweiligen Maßstäben für die x- und y-Achse.



4.2 ANALYTISCHE DARSTELLUNG (VEREINFACHTES PFEILDIAGRAMM)

Wir haben für die Darstellung von Funktionen schon verschiedene *aufzählende* und *beschreibende* Formen kennengelernt:

Als wichtige aufzählende Darstellungen die *Wertetabelle* und die graphische Darstellung im *Koordinatensystem*.

Beispiel: f:

x	-3	1	2	-1
y	-2	6	-2	3

Wertetabelle Graph

Als beschreibende Darstellung haben wir die *wörtliche Darstellung* und die *beschreibende Paarmengendarstellung* kennengelernt.

Beispiel: wörtliche Beschreibung : "Zur Funktion f sollen alle geordneten Paare (x|y) aus Z×Z gehören, deren Summe 4 ergibt."

Paarmengenschreibweise : $f = \{(x|y) \mid x+y = 4\}$

Weiterhin haben wir festgestellt, daß eine beschreibende Darstellung immer in eine aufzählende Form umgewandelt werden kann.

Beispiel: $f = \{(x|y) \mid x+y = 4\}_{Z\times Z} \longrightarrow$ f:

x	1	2	3	4	5	.
y	3	2	1	0	-1	.

Nun werden wir als weitere beschreibende Darstellung das vereinfachte Pfeildiagramm kennenlernen.

Im *vereinfachten Pfeildiagramm* wird augedrückt, daß jedem $x \in D$ ein $y \in W$ aufgrund einer eindeutigen Vorschrift zugeordnet ist:

$$f:\ x \to y,\quad x \in D$$

Lies: Die Funktion f ordnet jedem Element x des Definitionsbereiches D eindeutig ein $y \in W$ zu.

Der Zahlenwert für y hängt ab vom gewählten x-Wert und der Art der eindeutigen Zuordnungsvorschrift, die die Funktion beschreibt. Dieser Sachverhalt wird symbolisch durch die Schreibweise $y = f(x)$ dargestellt.

Man kann diese symbolische Schreibweise auch so lesen, daß der y-Wert eindeutig festgelegt ist durch die Zuordnungsvorschrift $f(\ )$ und die Angabe des x-Wertes. Z.B. haben wir die Zuordnung f( ) "y soll das Dreifache von x sein" kennengelernt; also $y = 3 \cdot x$

Ist die Zuordnungsvorschrift f( ) einer reellen Funktion f als *Rechenausdruck* darstellbar, so spricht man von einer *analytischen Funktion.* *analytische*

Beispiel: Gegeben sei die analytische Funktion

$f: x \to y = 1 + x^2, \quad x \in \mathbb{N}$

Lies: Die Funktion f ordnet jedem $x \in \mathbb{N}$ einen Zahlenwert y zu, der durch die Gleichung $y = 1 + x^2$ festgelegt ist.

[illegible] wird, nennt man *Funktionsgleichung.*

Das vereinfachte Pfeildiagramm einer analytischen Funktion [illegible] tionsgleichung zugeordnet ist, nennt man eine *analytische Darstellung.*

Will man nun wissen, welcher y-Wert dem x-Wert 5 zugeordnet ist, so setzt man diesen x-Wert in die *Funktionsgleichung* für y ein. Die Funktionsgleichung der obigen analytischen Funktion f ist bestimmt durch den Rechenausdruck

[illegible]

Für x=5 ist der zugehörige y-Wert

$y = 1 + (5)^2 = 1 + 25 = 26$

Damit haben wir ein geordnetes Paar (5|26) der Funktion f [illegible]

Für x = 2 ist $y = 1 + (2)^2 = 1 + 4 = 5$. Ein weiteres geordnetes Paar von f ist also (2|5). Auf diese Weise können wir zu jedem $x \in D$ den zugehörigen y-Wert der Funktion f berechnen. Wir erhalten eine Wertetabelle der Funktion:

[illegible]

Diese Wertetabelle stellt nur eine willkürliche Teilmenge aller geordneten Paare der Funktion f dar. Da der Funktion f eine *unendliche* Menge von Paaren entspricht, kann man auf die Frage nach der Wertetabelle dieser analytischen Funktion f keine eindeutige Antwort geben. Es ist eben nicht möglich (und auch nicht sinnvoll!), alle geordneten Paare der Funktion darzustellen. Wir müssen uns deshalb um sinnvolle Auswahlkriterien für die Bestimmung der x-Werte bemühen, die wir in die Wertetabelle aufnehmen wollen. Hierzu bedenken wir, daß Wertetabellen stets aus einem bestimmten Grund aufgestellt werden. Solche Gründe können sehr verschieden sein und führen zu verschiedenen Teilmengen von geordneten Paaren der Funktion, die in der Wertetabelle dargestellt werden. Wir wollen dies an einem kurzen Beispiel erläutern:

Angenommen obige analytische Funktion $f: x \to 1 + x^2, x \in \mathbb{N}$ sei gegeben. Dann kann man sich folgende sinnvolle Fragestellung überlegen:

1. Man möchte wissen, welche y-Werte speziellen x-Werten zugeordnet werden müssen; z.B. den x-Werten 1, 2, 3, 5, 10. In diesem Fall müßte die Wertetabelle nur geordnete Paare zu diesen x-Werten enthalten:

f:	x	1	2	3	5	10
	y	2	5	10	26	[illegible]

2. Ein anderes Ziel könnte sein, sich für den Teilbereich $x \in [1; 100]_{\mathbb{N}}$ der Definitionsmenge D einen Überblick über die zugehörigen y-Werte von f zu verschaffen. Dann wäre es sinnvoll, nur x-Werte aus dem Bereich $[1; 100]_{\mathbb{N}}$ in die Wertetabelle zu nehmen. Die Darstellung aller geordneten Paare des Bereiches $[1; 100]_{\mathbb{N}}$ der Funktion f ist aber zu aufwendig, da diesem Bereich 100 Paare zugeordnet sind. In einem solchen Fall begnügt man sich mit x-Werten, die im regelmäßigen Abstand aus dem Bereich $[1; 100]$ entnommen werden. Man käme dann z.B. zur folgenden Wertetabelle für $f: x \to 1 + x^2, x \in \mathbb{N}$

f:	x	1	20	40	60	80	100
	y	2	401	1601	3601	6401	10001

oder, wenn man den Abstand zwischen den x-Werten geringer wählt:

[illegible]

Im zweiten Fall ist der Rechenaufwand doppelt so hoch, so daß man sich fragen muß, ob dieser Aufwand gerechtfertigt ist.

Aufgrund der 1. Tabelle kann man schon sagen, daß für obige Funktion der Wertebereich $W = \{2; 10\ 001\}$ ist. Weiterhin kann man feststellen, daß die y-Werte bei steigenden x-Werten sich ständig vergrößern.

Die ausführlichere 2. Tabelle bringt im wesentlichen nichts Neues. Zum Zweck des Überblicks über eine Funktion reicht also Tabelle 1 vollkommen aus.

Beachte: Wenn nicht ausdrücklich gefordert, sollte man bei Wertetabellen solche x-Werte auswählen, für die die Berechnung der zugehörigen Funktionswerte y einfach ist. Im obigen Beispiel wurden deshalb nur solche x-Werte in die Wertetabelle aufgenommen deren Quadrate sich gut berechnen ließen.

3. Eine Wertetabelle wird häufig auch zum Zweck der graphischen Darstellung einer Funktion aufgestellt. Graphische Darstellungen sind wesentlich anschaulicher als Tabellen oder analytische Darstellungen von Funktionen. Sie setzen aber die Bestimmung von geordneten Paaren als Grundlage der graphischen Darstellung voraus. Am Beispiel der Funktion $f: x \to 1 + x^2, x \in \mathbb{N}$ wollen wir nun zeigen, welche prinzipiellen Überlegungen bei der Aufstellung der Wertetabelle zur graphischen Darstellung einer

Funktion angestellt werden müssen.

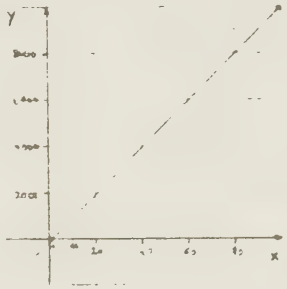
Problem: **Im Bereich $[1;100]_{G=\mathbb{N}}$ soll die Funktion $f: x \to 1 + x^2$ graphisch dargestellt werden.**

Verfahren:
Man beginnt mit der Bestimmung der geordneten Paare von f, die den Bereichsgrenzen entsprechen und stellt diese graphisch dar.

In obigem Beispiel werden die geordneten Paare für x = 1 und x = 100 bestimmt.

Wertetabelle f:

x	1	100
y	2	10001

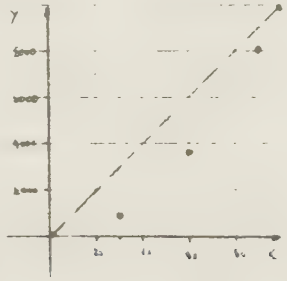


Man stellt nun eine Hypothese auf, wo die übrigen Punkte von f liegen. Im einfachsten Fall könnte man annehmen, daß alle Punkte auf einer Geraden durch die zwei Punkte P(1|2) und P(100|10001) liegen. Zur Prüfung dieser Vermutung bestimmen wir für weitere x-Werte aus dem Bereich $[1;100]_{\mathbb{N}}$ die zugehörigen Punktionswerte y; z.B. für x=30 , x=60 und x=90.

Wertetabelle:

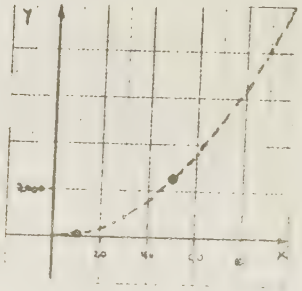
f:

x	1	100	30	60	90
y	2	10001	901	3601	8101



Durch Einzeichnen der Punkte stellen wir fest, daß obige Hypothese falsch war. Die Punkte der Funktion $f: x \to 1+x^2$ liegen nicht auf einer Geraden, da die Abweichungen sehr groß sind.

Wir vermuten, daß die Punkte der Funktion vielleicht auf einer glatten Kurve liegen, die die bisher eingezeichneten Punkte verbindet.



Durch weitere geordnete Paare versucht man nun diese neue Hypothese zu bestätigen; z.B. für x = 10 und x = 50

f:

x	1	100	30	60	90	10	50
y	2	10001	901	3601	8101	101	2501

Man erkennt, daß die neuen Punkte den angenommenen Kurvenverlauf sehr gut bestätigen.

Damit haben wir mit ausreichender Sicherheit den Graph der Funktion $f: x \to 1 + x^2$ im Bereich $[1; 100]_{G=\mathbb{N}}$

Beachte: Für die graphische Darstellung einer Funktion sind die x-Werte aus dem darzustellenden Bereich so auszusondern, daß
a) möglichst wenig Rechenarbeit zur Bestimmung der y-Werte notwendig ist
b) die Kurve, auf der die Punkte der Funktion liegen, mit ausreichender Sicherheit im vorgegebenen Bereich angebbar ist.

Beim Zeichnen der Verbindungslinie der schon dargestellten Punkte geht man von der Vermutung aus, daß es sich stets um glatte Kurven handelt.

Weiteres Bsp.: Gesucht ist der Graph der Funktion

$f: x \to \frac{x}{1,7} + 1$ im Bereich $[-34; 34]_{G=\mathbb{N}}$

1. Berechnung der Funktionswerte y für die Grenzen des Bereiches; also für x=-34 und x=+34.

$y = \frac{x}{1,7} + 1$

Wertetabelle: f:

x	-34	34
y	-19	21

Vermutung:

Alle Punkte der Funktion liegen auf einer Geraden die durch die Punkte P(-34|-19) und P(34|21) geht.

2. Prüfung der Hypothese
an weiteren x-Werten, z.B. x = o, x=-17 und x= 17 .

Wertetabelle:

f: x	-34	+34	o	-17	+17
y	-19	21	1	-9	11

Die drei zuletzt eingezeichneten Punkte bestätigen die Hypothese, daß die Punkte der Funktion auf einer Geraden liegen.

Damit wollen wir das Gebiet der verschiedenen Darstellungsweisen analytischer Funktionen abschließen und uns spezielle Typen einfacher, analytischer Funktionen genauer betrachten. Doch vorher soll noch einmal zusammengefaßt werden, was Sie sich über analytische Funktionen behalten sollten:

1. Begriffe

Funktion: Eine Funktion f ist eine spezielle Relation, bei der jedem Element $x \in D$ genau ein $y \in W$ zugeordnet ist.

Reelle Funktion: Eine reelle Funktion f stellt eine Zuordnung zwischen zwei Zahlmengen dar.

Analytische Funktion: Bei einer analytischen Funktion läßt die Zuordnungsvorschrift als Rechenausdruck darstellbar.

Funktionsgleichung: y = f (x): Die Funktionsgleichung gibt den Rechenausdruck f ( ) an, nach de die mit vorgebenen x-Werten berechnet werden können.

Definitionsbereich D: Der Definitonsbereich D ist die Menge aller Elemente x, denen aufgrund der Zuordnungsvorschrift f( ) eindeutig ein Funktionswert y zugeordnet werden kann.

Wertebereich W: Der Wertebereich W einer Funktion ist die Menge aller zugeordneten Elemente y, die als zweite Komponente in einem geordneten Paar der Funktion vorkommen.

Bereich $[x_1;x_2]_{G=\ldots}$: Der Bereich $[x_1;x_2]_{G=\ldots}$ ist die Menge aller Elemente von G, die zwischen dem kleinsten Element x_1 und dem größten Element x_2 liegen.

2. Aufzählende und beschreibende Darstellungen analytischer Funktionen

a) Die beschreibende Darstellung einer analytischen Funktion besteht in der Angabe des Rechenausdrucks f( ), nach dem die y-Werte bei vorgebenen x-Werten berechnet werden können und in der Angabe der Definitionsmenge D, für die die Funktion definiert ist.

Form: $f : x \rightarrow f(x) \quad , x \in D$

Beispiel: $f : x \rightarrow 1 + x^2, x \in \mathbb{N}$

b) aufzählende Darstellung sind Wertetabelle und Graph

Wertetabelle: Die Wertetabelle ist eine Teilmenge der geordneten Paare der Funktion. Welche Teilmenge man in die Wertetabelle aufnimmt, hängt vom Zweck ab. Folgende Gründe haben wir behandelt.

1. Es sind die geordneten Paare von f für bestimmte x-Werte gesucht. Dann werden nur diese x-Werte in die Wertetabelle aufgenommen.
2. Es ist der Wertebereich W einer Funktion in einem Bereich $[x_1; x_2]$ gesucht. Dann wird man die x-Werte im regelmäßigen Abstand aus dem Bereich $[x_1; x_2]_G$ aussondern.
3. Es ist der Graph einer analytischen Funktion f im Bereich $[x_1; x_2]$ gesucht. Dann wird man die x-Werte in Verbindung mit dem Graphen so auswählen, daß man den Verlauf der Kurve, auf der die Punkte der Funktion liegen, mit einiger Sicherheit angeben kann.

Form: f:

x	x_1	x_2	x_3
y	y_1	y_2	y_3

Graphische Darstellung:

Die graphische Darstellung analytischer Funktionen ist sehr übersichtlich. Wann immer man Aussagen über Zusammenhänge zwischen x- und y-Werten machen will, wird man sinnvoller Weise die geordneten Paare der Funktion graphisch darstellen.

Form:

Wichtige Begriffe:
Zahlengerade (Achse), Ursprung, Abszisse (x), Ordinate (y), Bildpunkt P $(x_1|y_1)$, Koordinaten x und y, Quadranten.

Anmerkung: Sie sollten wissen, daß bei graphischen Darstellungen einer Funktion im Koordinatensystem der Ausschnitt und der Maßstab nach praktischen Gesichtspunkten ausgewählt werden muß.

5. EINFACHE ANALYTISCHE FUNKTIONSTYPEN

Im letzten Kapitel haben wir ausführlich die verschiedenen aufzählenden und beschreibenden Darstellungen geübt. Dabei sollte klar geworden sein, daß beschreibende Darstellungen (analytische Darstellung) immer in aufzählende Darstellungen (Wertetabelle, Graph) umgewandelt werden können. Eine aufzählende Darstellung einer reellen Funktion kann aber nur dann in eine beschreibende Darstellung umgewandelt werden, wenn

1. zwischen den Komponenten aller geordneten Paare der Funktion ein Zusammenhang besteht, der als Rechenausdruck angebbar ist;
2. dieser Zusammenhang erkannt wird.

Punkt 2. soll an folgendem Beispiel erläutert werden:

Beispiel: Gegeben sei folgende Wertetabelle einer analytischen Funktion f. Es soll der Rechenausdruck angegeben werden.

f:	x	1	2	3	4	5	...
	y	2	5	10	17	26	...

Können Sie den Rechenausdruck angeben?

Der Zusammenhang zwischen x und y läßt sich für obige Funktion f durch die Funktionsgleichung $y = 1 + x^2$ beschreiben.

In vielen Wissenschaften bemüht man sich, den Zusammenhang zwischen zwei Größen in analytischer Form darzustellen, da diese die präziseste, umfassendste und knappste Darstellungsform ist. So kennen Sie in Physik Formeln, die den Zusammenhang zwischen der Fahrzeit t und dem zurückgelegten Weg s eines Autos bei konstanter Geschwindigkeit v_o beschreiben ($s = v_o \cdot t$).

Auch in anderen Wissenschaften wie Biologie, Chemie, Psychologie, Wirtschaftslehre usw. wird die analytische Darstellung eines Zusammenhangs angestrebt.

Das Problem dieses Kapitels ist:

1. Wie kann man bei einer Funktion, die in aufzählender Form gegeben ist, erkennen, ob der Zusammenhang als Rechenausdruck beschreibbar ist?
2. Wie bestimmt man die Funktionsgleichung einer als Wertetabelle oder Graph gegebene Funktion, wenn diese als analytische Funktion erkannt wurde?

Vorgehensweise zur Klärung obiger Fragen:

Wir werden so vorgehen, daß wir eine Reihe einfacher analytischer Funktionstypen besprechen und deren Eigenschaften untersuchen. Für jeden dieser Funktionstypen werden wir ein Verfahren lernen, wie man anhand des Graphens erkennen kann, ob es sich bei einer unbekannten Funktion um diesen Typ handelt. Im zweiten Schritt werden wir dann bei bekanntem Funktionstyp die Funktionsgleichung bestimmen.

Zu behandelnde Funktionstypen:

1. $f: x \to a_o$ — Name: *konstante* Funktion (Bild: *Parallele zur x-Achse*)
2. $f: x \to a_1 \cdot x$ — Name: *lineare* Funktion (Bild: *Ursprungsgerade*)
3. $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ — Name: *allgemeine lineare* Funktion (Bild: *Gerade*)

Die Größen a_o und a_1 sind konstante Zahlen aus der Menge der rationalen Zahlen; $a_o \in \mathbb{Q}$ und $a_1 \in \mathbb{Q}$.

5.1 DIE KONSTANTE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_o$, $x \in \mathbb{Q}$

Die *konstante Funktion* $f: x \to a_o$ ist die einfachste analytische Funktion, die möglich ist. Sie ordnet jedem x des Definitionsbereiches D einen *konstanten Wert* $a_o \in \mathbb{Q}$ zu. a_o nennt man *Formvariable* der Funktion.

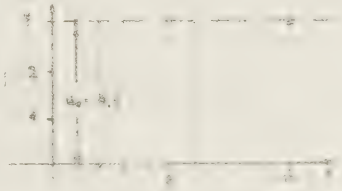
EIGENSCHAFTEN DES FUNKTIONSTYPS $f: x \to a_o$, $x \in \mathbb{Q}$

Die Eigenschaften reeller Funktionen lassen sich stets sehr gut anhand der Graphen dieser Funktionen bestimmen. Um die zugeordneten Zahlenwerte y einer Funktion vom Typ $f: x \to a_o$ angeben zu können, muß die Formvariable a_o zahlenmäßig festgelegt sein. Durch Festlegung dieses Zahlenwertes der Formvariablen kommt man vom Funktionstyp zu einer bestimmten Funktion.

Beispiel: Wie sieht der Graph der konstanten Funktion $f: x \to a_o$, $x \in \mathbb{N}$ im Bereich $]1;10[$ aus, wenn die Formvariable $a_o = 3{,}1$ ist?

Wertetabelle:

f:	x	1	10	5
	y	3,1	3,1	3,1

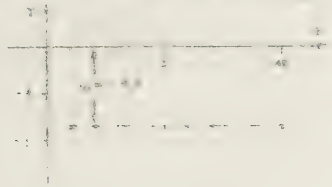


Graph der Funktion $f: x \to 3{,}1$, $x \in \mathbb{N}$

Wurde man als Formvariable $a_o = -1{,}7$ wählen, so würden alle Punkte auf einer Parallelen zur x-Achse im Abstand $-1{,}7$ liegen:

Wertetabelle:

f:	x	1	10	5
	y	-1,7	-1,7	-1,7



Beachte: **Durch die Veränderung der Formvariablen a_0 bleibt das typische Bild des Graphen der konstanten Funktion erhalten. Alle Punkte liegen stets auf einer Parallelen.**

Desnalb sagt man, daß alle Funktionen, deren Funktionsgleichung von der Form $y=a_0$, $a_0 \in \mathbb{Q}$ ist, dem gleichen Funktionstyp angehören.

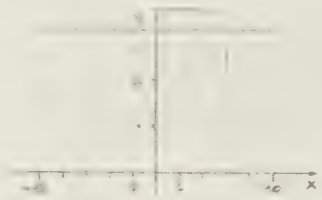
Da im Vergleich zwischen einem Funktionstyp (z.B. $x \to a_0$) und einer bestimmten Funktion dieses Typs ($x \to 3{,}1$) sehr wichtig ist, wollen wir uns dies noch einmal an einem anderen Beispiel klarmachen:

Sie kennen alle den Begriff "Quadrat". Er bestimmt einen bestimmten Figurentyp mit der Eigenschaft "gleichseitiges Rechteck". Wenn man 100 Leute bitten würde, ein Quadrat zu zeichnen, so erhielte man [illegible] eben nur den Figurentyp angegeben, aber keine Aussage über die Formvariable "Länge des Quadrats" gemacht. Erst wenn man den Wert der Formvariablen (z.B. Seite soll 5cm lang sein) vorgibt, kämen alle 100 Leute zum gleichen Quadrat.

Ähnlich ist es mit dem Funktionstyp und einer bestimmten Funktion dieses Typs. Das Bild des Typs $f: x \to a_0$ ist immer eine Parallele. Um aber den Graph einer bestimmten Funktion dieses Typs eindeutig zu beschreiben, muß der Wert für a_0 festgelegt sein.

In unseren obigen Beispiel konnte x nur ganzzahlige Werte annehmen, da als Bedingung $x \in \mathbb{N}$ festgesetzt war. Diese Beschränkung wollen wir nun aufgeben und als Definitionsmenge D stets die Menge der rationalen Zahlen ($D = \mathbb{Q}$) voraussetzen.

Der Graph der Funktion $f: x \to 3{,}1$, $x \in \mathbb{Q}$ im Bereich $[-10; 10]$ ist dann aber eine dichte Folge von Punkten, die alle auf der Parallelen zur x-Achse im Abstand $a_0 = 3{,}1$ liegen:

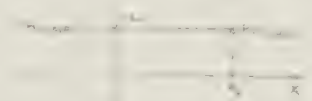


Solche dichten Folgen von Punkten dürfen wir durch eine geschlossene Linie darstellen, [illegible] genannt.

Beachte: Punkte dürfen nur dann durch eine geschlossene [illegible], wenn die **Grundmenge $G = \mathbb{Q}$ ist, da dann jedem Punkt auf der x-Achse ein Funktionswert zugeordnet ist. Für $G = \mathbb{Z}$ oder $G = \mathbb{N}$ ist der Graph stets eine Folge von Punkten, nie eine Kurve!**

Eigenschaften einer konstanten Funktion vom Typ $f: x \to a_0$; $x \in \mathbb{Q}$, $a_0 \in \mathbb{Q}$

1. **Die konstante Funktion ordnet jedem $x \in \mathbb{Q}$ einen konstanten y-Wert a_0 zu.**
2. **Der Graph der Funktion ist eine Parallele zur x-Achse im Abstand $y = a_0$.**
3. **Man erhält den Graphen einer konstanten Funktion für einen Bereich $x \in [x_1; x_2]$ durch Einzeichnen der Punkte $P(x_1|a_0)$ und $P(x_2|a_0)$, da eine Parallele durch zwei Punkte eindeutig bestimmt ist.**
4. Graph der konstanten Funktion $f: x \to a_0$, und $x \in [x_1; x_2]_{\mathbb{Q}}$



ERKENNEN EINER KONSTANTEN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_0$, $x \in \mathbb{Q}$ UND BESTIMMUNG DER GRÖSSE a_0.

Im letzten Kapitel gingen wir vom Problem aus, die Eigenschaften eines gegebenen Funktionstyps der Form $f: x \to a_0$ zu bestimmen. Hierzu haben wir für einen bestimmten Wert a_0 die zugehörige Wertetabelle und den Graphen der Funktion dargestellt. Häufig trifft man aber auch auf das umgekehrte Problem:

Es ist die Wertetabelle oder der Graph einer Funktion gegeben, deren analytischer Ausdruck bestimmt werden soll. Sicher werden Sie fragen, wozu man den analytischen Ausdruck einer schon als Wertetabelle oder Graph dargestellten Funktion wissen will. Wir wollen die zwei wichtigen Gründe noch einmal wiederholen:

1. Wertetabellen und Graphen stellen im allgemeinen stets Teilmengen einer Funktion dar. Die vollständige Beschreibung ist nur über die analytische Darstellung möglich. Erst dann kann jedem $x \in D$ eindeutig ein y-Wert zugeordnet werden.
2. Die analytische Darstellung [illegible] weniger Platz.

Dies wollen wir uns an folgendem Problem klarmachen:

Nehmen Sie an, es sei folgende Wertetabelle einer Funktion f gegeben, die für den Bereich $x \in [1; 100]_{\mathbb{Q}}$ [illegible] sei:

f: x	1,1	3,5	17,8	69,5	97
y	-2,11	-2,11	- 2,11	- 2,11	- 2,11

Gefragt ist nun nach dem zugehörigen Funktionswert y für x = 12.

Einige werden sagen, daß für x = 12 der zugehörige y-Wert aus der Wertetabelle nicht ablesbar ist. Deshalb können Sie den y-Wert für x = 12 nicht angeben. Andere werden sagen, der zugehörige y-Wert ist -2,11. Wie kommen sie darauf? Betrachten wir die den x-Werten zugeordneten y-Werte, so stellt man fest, daß allen x-Werten der konstante y-Wert y = -2,11 zugeordnet ist. Mit großer Wahrscheinlichkeit kann deshalb darauf geschlossen werden, daß in obiger Tabelle die konstante Funktion vom Typ $f: x \to a_o$ mit $a_o = -2{,}11$ dargestellt ist. Wenn dies aber bekannt ist, kann man sofort den zu x = 12 gehörenden y-Wert angeben. Bei konstanten Funktionen wird man dieses Ergebnis noch ohne großen gedanklichen Aufwand herausfinden, da sie den einfachsten Funktionstyp darstellen.

Beachte: Liegt eine Funktion als Wertetabelle vor, deren zugeordnete y-Werte alle gleich einem konstanten Wert y_o sind, so läßt sich die Funktion durch den Typ $f: x \to a_o$, $x \in D$ beschreiben, wobei die Formvariable $a_o = y_o$ gesetzt wird.

Ist die Funktion als Graph gegeben, so läßt sich ähnlich einfach entscheiden, ob es sich um eine konstante Funktion handelt und welchen Wert die Konstante a_o annimmt:

Beispiel: Gegeben seien folgende Graphen von Funktionen

Gesucht ist der analytische Ausdruck der Funktion.

Verfahren zur Bestimmung des analytischen Ausdrucks einer Funktion aufgrund der Kenntnis des Graphen:

1. Schritt: **Im ersten Schritt versucht man den Funktionstyp zu erkennen. Hierzu vergleicht man die Graphen mit den Graphen, deren Funktionstyp man kennt.**

Im obigen Beispiel a. und c. ist der Funktionstyp unbekannt. Also können Sie die analytische Darstellung nicht angeben.

Dagegen entspricht Beispiel b. dem Graph einer konstanten Funktion, da alle Punkte aus einer Parallelen zur x-Achse liegen; also $f: x \to a_o, x \in \mathbb{Q}$

2. Schritt: **Wenn man den Funktionstyp bestimmen konnte, muß man nun den Wert für die Formvariable a_o angeben.** Hierzu liest man für irgendeinen x-Wert den zugehörigen y-Wert ab. Im obigen Beispiel erhält man den Wert $y_o = -22{,}5$. Aufgund der Kenntnis der Eigenschaften konstanter Funktionen kann man nun sofort den Wert für die Formvariable a_o angeben, da $y_o = a_o$ ist; also $a_o = -22{,}5$.

3. Schritt: Im dritten Schritt setzt man a_o in den zugrundegelegten Funktionstyp $f: x \to a_o$ ein; also $f: x \to -22{,}5$.

Beachte: Die Bestimmung der Funktionsgleichung einer als Wertetabelle oder Graph gegebenen Funktion läuft stets über zwei wichtige Schritte ab:

1. Erkennen des Funktionstyps;
2. Bestimmung der Formvariablen.

Erkennt man den Funktionstyp einer gegebenen Funktion nicht, so bedeutet das noch nicht, daß diese Funktion keinem Funktionstyp entspricht. Z.B. lassen sich zu obigen Beispielen a. und c. ebenfalls analytische Funktionen angeben (für Beispiel a. $f: x \to 1+\frac{1}{20}x$ und für Beispiel c. $f: x \to \frac{100}{x}$). Allerdings haben wir diese Typen noch nicht behandelt.

5.2 DIE LINEARE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 x$, $x \in \mathbb{Q}$

Die *linearen Funktionen vom Typ* $f: x \to a_1 x$ sind die nächstschwierigeren analytischen Funktionen.

EIGENSCHAFTEN DES FUNKTIONSTYPS $f: x \to a_1 x$, $x \in \mathbb{Q}$

Die Rechenvorschrift $x \to a_1 x$ bedeutet:

"Ordne jedem $x \in \mathbb{Q}$ das a_1-Vielfache des x-Wertes als y-Wert zu."

Man sagt: *"Der zugeordnete y-Wert ist proportional dem x-Wert."*

Die Formvariable a_1 bezeichnet man als *Proportionalkonstante* einer linearen Funktion.

Welche Eigenschaften besitzt dieser Funktionstyp? Um dies zu klären, geben wir uns einen speziellen Wert für die Formvariable a_1 vor und zeichnen den Graphen dieser speziellen Funktion.

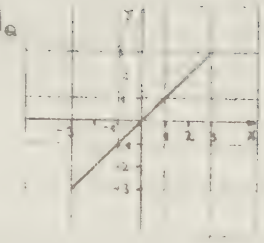
Die einfachste lineare Funktion erhalten wir, wenn wir a_1 gleich 1 setzen. Dann lautet die Funktion:

$f: x \to 1 \cdot x$.

Diese Funktion soll nun im Bereich $[-3; 3]_{\mathbb{Q}}$ graphisch dargestellt werden:

Wertetabelle

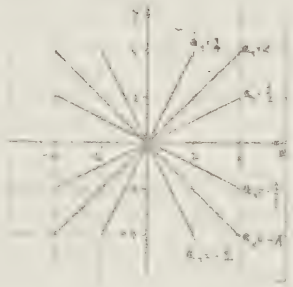
x	3	-3	0	1	-1
y	3	-3	0	1	-1



Der Graph der Funktion $f: x \to 1 \cdot x$ ist eine *Gerade durch den Ursprung* des Koordinatensystems. Um den Einfluß der Proportionalitätskonstanten a_1 auf den Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ zu überblicken, sind auf der folgenden Abbildung Funktionen mit verschiedenen Werten von a_1 dargestellt.

Wertetabelle:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = -x$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$y = 2x$	-6	-4	-2	0	2	4	6
$y = -2x$	6	4	2	0	-2	-4	-6
$y = \frac{1}{2}x$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$y = -\frac{1}{2}x$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$



Beschreiben Sie den Einfluß von a_1 auf das Bild der Funktion!

Beachten Sie folgende zwei Punkte: Für x=o ist der zugehörige Funktionswert für lineare Funktionen stets o. Für x=1 ist der zugehörige Funktionswert stets gleich dem Wert für a_1 (siehe stark umrandetes Feld in der Wertetabelle).

Welchen Einfluß hat das Vorzeichen von a_1? (s. "Eigenschaften" Punkt 5 auf der nächsten Seite)

Eigenschaften von $f: x \to a_1 \cdot x$

Eigenschaften des Funktionstyps $f: x \to a_1 \cdot x,\ x \in \mathbb{Q}$

1. Die Funktion ordnet jedem $x \in \mathbb{Q}$ das a_1-Vielfache des x-Wertes als y-Wert zu.
2. Der Graph der Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung, *Ursprungsgerade* genannt.
3. Die geordneten Paare $(o \mid o)$ und $(1 \mid a_1)$ sind Elemente der Funktion.
4. Da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig bestimmt wird, ist der Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ durch Bestimmung zweier Punkte zeichenbar.
   Leicht zu berechnende Punkte sind: $P_0(o \mid o)$ und $P_1(1 \mid a_1)$
5. Ist die Proportionalitätskonstante a_1 positiv, so verläuft die Gerade ausschließlich im I. und III. Quadranten. Ist sie negativ, so verläuft die Gerade ausschließlich im II. und IV. Quadranten.
6. Je größer der Betrag von a_1, desto steiler verläuft die Gerade.

Machen Sie sich diese Eigenschaften noch einmal an folgender Darstellung der Funktion $f: x \to 2{,}1x$ und $f: x \to -2{,}1 \cdot x$ klar:

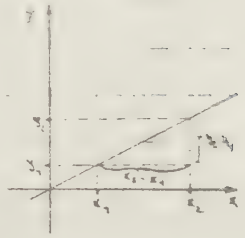
Wertetabelle.

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2{,}1 \cdot x$	-4,2	-2,1	0	2,1	4,2
$y = -2{,}1 \cdot x$	4,2	2,1	0	-2,1	-4,2

Wir wollen noch etwas bei der Bedeutung der Proportionalitätskonstanten a_1 verweilen.
Wie wir gesehen haben, unterscheiden sich die Graphen der Funktionen $f: x \to a_1 \cdot x$ für verschiedene Werte von a_1 hinsichtlich ihrer *Steigung*. Wir kennen diesen Begriff aus dem täglichen Leben als das Verhältnis von Höhendifferenz zu Horizontaldifferenz. Mathematisch bedeutet das:

Die Steigung m einer linearen Funktion ist definiert als das Verhältnis der Differenz zweier y-Werte zu der Differenz der zugehörigen x-Werte

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



Steigung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In dieser Definition wird nichts darüber ausgesagt, welche Paare $(x_1 | y_1)$ und $(x_2 | y_2)$ der linearen Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ gemeint sind. Das ist auch nicht notwendig, da diese Formel für alle geordneten Paare von f gilt.

Beweis: Ersetzt man die Werte y_1 und y_2 in obiger Formel für m durch $y_1 = a_1 \cdot x_1$ und $y_2 = a_1 \cdot x_2$ so erhält man

$$m = \frac{a_1 \cdot x_2 - a_1 \cdot x_1}{x_2 - x_1} = \frac{a_1 \cdot (x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a_1$$

Daraus folgt: *Die Steigung m einer linearen Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x$ ist gleich der Proportionalitätskonstanten a_1.*

ERKENNEN EINER LINEAREN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 \cdot x$ UND BESTIMMUNG DER GRÖSSE a_1.

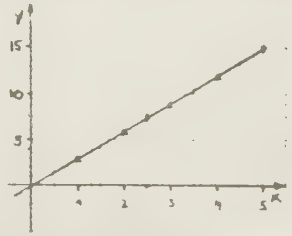
Nehmen Sie an, folgende Wertetabelle einer Funktion f sei gegeben:

f:

x	1	2	3	4	5
y	3	6	9	12	15

Gesucht sei die analytische Darstellung der Funktion. Betrachtet man die geordneten Paare der Funktion, so kann man erkennen, daß die y-Werte jeweils das dreifache des zugehörigen x-Wertes darstellen. Also wird man vermuten, daß es sich um den Typ einer linearen Funktion handelt. Allerdings ist es nicht mehr so einfach wie bei konstanten Funktionen, diesen Zusammenhang anhand der Wertetabelle zu erkennen. Übersichtlicher ist hier im jedem Fall die graphische Darstellung.

Graph der Funktion f



Die Punkte der Funktion liegen auf einer Geraden, die durch den Ursprung des Koordinatensystems geht. Deshalb liegt hier der f-Typ $f: x \to a_1 \cdot x$ vor.

Im zweiten Schritt muß man den Wert der Formvariablen a_1 über die Steigungsformel anhand zweier geordneten Paare der Funktion bestimmen:

Setzt man z.B die geordneten Paare (1|3) und (5|15) der Wertetabelle die Steigungsformel

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{ein,}$$

so erhält man:

$$a_1 = m = \frac{15 - 3}{5 - 1} = \frac{12}{4} = 3$$

Gleiches Ergebnis erhält man für andere geordnete Paare: z.B. (1 | 3) und (2 | 6)

$$a_1 = \frac{6 - 3}{2 - 1} = 3$$

Obige Wertetabelle stellt also eine Teilmenge der linearen Funktion $f: x \to 3 \cdot x$ dar.

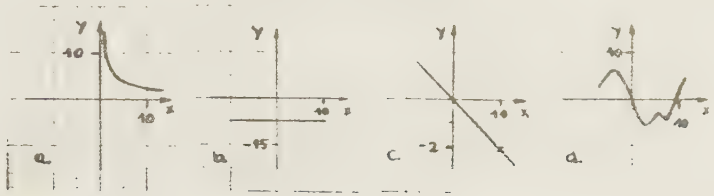
Beachte: Zwei Fehler, die häufig gemacht werden, sind:

1. Im Zähler der Steigungsformel werden statt der y-Werte die x-Werte eingesetzt!
2. Die Reihenfolge der y-Werte stimmt nicht mit der Reihenfolge der x-Werte überein!

Beide Fehler können sehr schnell entdeckt werden, wenn man die x-Koordinate eines weiteren geordneten Paares in die berechnete Funktionsgleichung einsetzt. Beschreibt die Funktionsgleichung die vorgegebene Funktion richtig, so erhält man für den eingesetzten x-Wert den zugehörigen Funktionswert y des geordneten Paares.
In obigem Bsp. prüfen wir die Funktionsgleichung für das Paar (2,5|7,5), indem wir den x-Wert 2,5 in die Gleichung $y = 3 \cdot x$ einsetzen $\Rightarrow$ $y = 3 \cdot 2{,}5 = 7{,}5$ .Der berechnete y-Wert stimmt also mit abgelesenen y-Wert überein.!

Ist die Funktion als Graph gegeben, so entfällt die graphische Darstellung zur Erkennung des Funktionstypes, wie sie bei Wertetabellen notwendig ist.

Beispiel: Gegeben seien folgende vier Funktionen, deren analytische Darstellung gesucht ist.



Verfahren zur Bestimmung der Funktionsgleichung:

1. Schritt: Bestimmung des Funktionstyps

im Fall a. ist Funktionstyp unbekannt
im Fall b. liegt konstante Funktion $f: x \to a_o$ vor
im Fall c. liegt lineare Funktion $f: x \to a_1 \cdot x$ vor
im Fall d. ist Funktionstyp unbekannt.

2. Schritt: Bestimmung der Formvariablen für erkannte Funktionstypen

im Fall b. läßt sich Formvariable a_o direkt ablesen; $a_o = -7{,}5$

im Fall c. muß die Formvariable a_1 über die Steigungsformel berechnet werden. Hierzu benötigt man zwei geordnete Paare der Funktion. Da die Wertetabelle nicht gegeben ist, muß man diese aus dem Graph entnehmen. Hierbei wird man die Arbeit sich dadurch erleichtern, daß man die Koordinaten der Punkte [illegible] ablesbar sind:

z.B. $(0 \mid 0)$ und $(10 \mid -2{,}1)$

Also $a_1 = \frac{-2{,}1 - 0}{10 - 0} = \frac{-2{,}1}{10} \simeq -\frac{1}{5}$

3. Schritt: Einsetzen der [illegible] in die Funktionstypen.

im Fall b. erhält man die Funktion $f: x \to -7{,}5$
im Fall c. erhält man die Funktion $f: x \to -\frac{1}{5} \cdot x$

Oft macht die Bestimmung geordneter Paare aus Graphen gewisse Schwierigkeiten, sodaß nur ungenaue Werte für die [illegible] der Formvariablen abgelesen werden können.

4. Schritt: Überprüfung der gefundenen Funktionsgleichungen:

Auch bei der Umwandlung einer graphischen Darstellung in einen analytischen Ausdruck ist eine Überprüfung der Funktionsgleichung, die man bestimmt hat, möglich.

Für die konstante Funktion (b.) ist die Prüfung sehr einfach. Man prüft a_o an einem weiteren y-Wert.

Für Fall c. würde man die x-Koordinate eines Punktes, z.B. $P(-10 \mid 2{,}1)$ in die gefundene Funktionsgleichung $y = -\frac{1}{5} \cdot x$ einsetzen: $y = -\frac{1}{5} \cdot (-10) = \frac{10}{5} = 2$!

Sie sehen, daß das geordnete Paar $(-10 \mid 2{,}1)$ nur in etwa die gegebene Funktionsgleichung erfüllt, da Ablesefehler unvermeidlich sind. Die Abweichungen sind allerdings so gering, daß wir den analytischen Ausdruck als richtig annehmen wollen.

Damit haben wir die Eigenschaften des Funkitonstyps $f: x \to a_1 \cdot x$ ausreichend behandelt und gelernt, wie man die Funktionsgleichung gegebener Wertetabelle oder Graph eines solchen Funktionstyps berechnen kann.

5.3 DIE ALLGEMEINE LINEARE FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$

Die allgemein lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ setzt sich aus zwei uns schon bekannten Funktionstermen zusammen.

1. dem Term a_o, den wir von den konstanten Funktionen $f: x \to a_o$ her kennen,
2. dem Term $a_1 x$, den wir bei der linearen Funktion $f: x \to a_1 x$ behandelt haben.

Das machen wir uns an folgendem Beispiel klar. Gesucht sei der Graph der Funktion

$$y = 1 \cdot x + 1$$

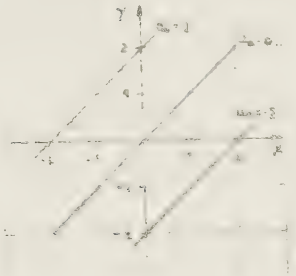
Wie schon festgestellt, setzt sich diese Funktion aus der Ursprungsgeraden $y = 1 \cdot x$ und der konstanten Funktion $y = 1$ zusammen.
Wir zeichnen zuerst die Ursprungsgerade $y = 1 \cdot x$ (s.Abb.1). Den Graph der gesuchten Funktion $y = 1 \cdot x + 1$ erhält man, wenn man jeden Punkt der Ursprungsgeraden um den Wert des konstanten Gliedes $a_o = 1$ (also um 1 Einheit) nach oben verschiebt. So wird aus dem Punkt $(0 \mid 0)$ der Punkt $(0 \mid 1)$, aus dem Punkt $(-1{,}5 \mid -1{,}5)$ der Punkt $(-1{,}5 \mid -0{,}5)$, u.s.w.

Abb 1

lineare Funktion + konst. Funktion = allg. lineare Funktion
$f: x \to a_1 \cdot x$ $\quad f: x_1 \to a_o$ $\quad f: x \to a_1 \cdot x + a_o$

Beachte: Man erhält den Graph der Funktion $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ aus dem Graph $f: x \to a_1 \cdot x$ durch eine Parallelverschiebung der Ursprungsgeraden um den Wert des konstanten Gliedes a_o.

Machen Sie sich diese Aussage noch einmal an dem folgenden Beispiel klar! Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse und dem Wert für a_o ?



Graph der Funktion

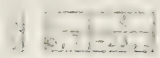
$f: x \to x + a_o$

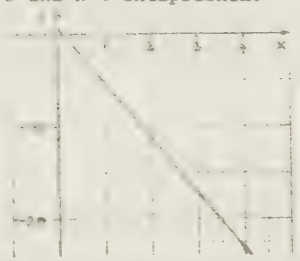
für $a_o = 2, o, -2$

Nachdem wir uns den Einfluß des konstanten Gliedes a_o auf den Graph einer linearen Funktion (Ursprungsgeraden) klar gemacht haben, wollen wir eine weitere Funktion dieses Typs zeichnen.
Nehmen wir an, wir suchen den Graph der Funktion

$f: x \to -6 \cdot x + o{,}7$ im Bereich $[o; 4]$.

Da wir schon wissen, daß der Graph einer allgemeinen linearen Funktion eine Gerade ist, beschränken wir unsre Wertetabelle auf diejenigen geordneten Paare, die den Bereichsgrenzen x=o und x=4 entsprechen:





Auch hier gilt : Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $(o|a_o)$!

Eigenschaften von $f: x \to a_1 x + a_o$

Eigenschaften der Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$

1. Der Graph der Funktion ist eine Gerade mit der konstanten Steigung a_1, die die y-Achse im Punkte $(o \mid a_o)$ schneidet.
2. Die konstante Funktion $f: x \to a_o$ ist ein Spezialfall der allgemeinen linearen Funktion für $a_1 = o$
   Die Ursprungsgeraden $f: x \to a_1 \cdot x$ sind Spezialfälle von $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ für $a_o = o$
3. Ist der Graph einer allgemeinen linearen Funktions gesucht, so erhält man diesen sehr einfach wenn man daran denkt, daß eine Gerade durch <u>zwei Punkte</u> eindeutig bestimmt ist.
   Leicht zu berechnende Punkte sind:
   $P(o \mid a_o)$, $P(1 \mid a_1 + a_o)$
4. Graph des Punktionstyps $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$, $x \in \mathbb{Q}$

$$a_1 = m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ERKENNEN EINER ALLGEMEINEN FUNKTION VOM TYP $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$

UND BESTIMMUNG DER KONSTANTEN a_1 UND a_o

Wie wir bei der Zusammenfassung der Eigenschaften schon festgestellt haben, ist eine allgemeine lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$ dadurch gekennzeichnet, daß alle Punkte der Funktion auf einer <u>Geraden</u> liegen. Umgekehrt können wir sagen:

Ist der Graph einer Funktion, deren Typ noch unbekannt ist, eine Gerade, so handelt es sich um den Funktionstyp $f: x \to a_1 \cdot x + a_o$!

Steht es fest, daß die Funktion vom Typ einer allgemeinen linearen Funktion ist, so gibt es ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Konstanten a_1 und a_o, wenn die Punkte $P(o|a_o)$ und $P(1|a_1+a_o)$ Elemente der gegebenen Funktion sind. Das wollen wir uns an folgendem Beispiel klar machen:

Gegeben sei die Wertetabelle einer Funktion f:

x	-2	-1	0	1	10
y	-1	-0,5	[illegible]	1,5	3

Um den Funktionstyp zu bestimmen, stellen wir die Wertetabelle graphisch dar:

Die Punkte der Funktion liegen auf einer Geraden, die nicht durch den Ursprung des Koordinatensystems geht; also liegt hier der Funktionstyp

$f: x \mapsto a_1 \cdot x + a_0$ vor.

Bei dem einfachen Verfahren zur Bestimmung der Formvariablen a_1 und a_0 bestimmt man nun die Koordinaten der beiden Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_1 + a_0)$, da für x=0 und x=1 die zugehörigen y-Werte in sehr einfacher Beziehung zu den Größen a_0 und a_1 stehen:

$y(x=0) = a_0$ und $y(x=1) = a_1 + a_0$

Für das obige Beispiel lesen wir aus dem Graphen:

$P(x=0|a_0) = P(0|-2) \Rightarrow a_0 = -2$

und

$P(x=1|a_1 + a_0) = P(1|-1,5) \Rightarrow a_1 + a_0 = -1,5$

$\Rightarrow a_1 = -1,5 - a_0 = -1,5-(-2) = 0,5$

$\Rightarrow a_1 = 0,5$

Die Funktion f lautet also: $f: x \mapsto 0,5 \cdot x - 2$

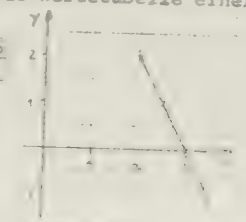
Beachte: Nicht immer sind die Koordinaten der Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_1+a_0)$ angebbar!

Beispiel: Gegeben sei folgende Wertetabelle einer Funktion:

f:

x	2	2,5	3	3,5
y	2	1	0	-1

Typ: f: [illegible]



Graph der [illegible]

Die Anwendung des einfachen Verfahrens ist hier nicht möglich, da die Koordinaten der Punkte für x=0 und x=1 nicht angebbar sind.

In solchen Fällen muß man a_1 und a_0 nach dem folgenden Verfahren berechnen:

1. Bestimme für zwei Punkte die zugehörigen Koordinaten x und y. (In unserem Fall: P(3|0) und P(2|2))
2. Berechne a_1 nach der Formel $a_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

   (Für P_1 und P_2 $\Rightarrow$ $a_1 = \frac{0-2}{3-2} = \frac{-2}{1} = -2$)
3. Setze den gefundenen Wert für a_1 in die Funktionsgleichung für allgemeine lineare Funktionen $y=a_1x+a_0$ ein, (für obiges Beispiel $y = -2x+a_0$).
4. Setze in diesen speziellen Ausdruck die Koordinaten von P_1 oder P_2 ein und bestimmen die Unbekannte a_0.

   (Für P_1 gilt: $0 = -2 \cdot 3 + a_0 \Rightarrow a_0 = 6$
   Für P_2 gilt: $2 = 2 \cdot 2 + a_0 \Rightarrow a_0 = 6$)

Beachte: Für beide Punkte P_1 und P_2 erhält man denselben Wert für a_0.

5. Angabe der analytischen Funktion: $f: x \mapsto -2x + 6$

Zur Begründung dieses Verfahrens: War der analytische Ausdruck einer Funktion *gegeben*, so erhielt man die Koordinaten jedes Punktes der Funktion, indem man zu vorgegebenem x-Wert den zugehörigen y-Wert mittels der Funktionsgleichung der Funktion berechnete. Umgekehrt muß der gesuchte analytische Ausdruck eines *gegebenen* Graphens einer Funktion so beschaffen sein, daß die Koordinaten der Punkte des Graphens die Funktionsgleichung erfüllen. Deshalb erhalten wir die unbekannten Konstanten a_1 und a_o durch Einsetzen von Koordinaten in die allgemeine Funktionsgleichung $y = a_1x+a_o$, wenn es sich um den Typ $f: x \to a_1x+a_o$ handelt.

Weiteres Beispiel:

Gegeben sei die Wertetabelle folgender analytischer Funktion:

f:	x	2	2,5	3	3,5
	y	2	o	-2	-4

Gesucht ist der Funktionstyp und die analytische Darstellung dieser Funktion.

1. Erkennen des f-Typs : $f: x \to a_1x + a_o$
2. Berechnung von a_4 für P(2|2) und P(3|-2) : $a_1 = \frac{2-(-2)}{2-3} = \frac{4}{-1} = -4$
3. Einsetzen von a_1 in die Funktionsgleichung: $y = -4 \cdot x + a_o$
   $y=a_1x+a_o$
4. Bestimmung von a_o durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (z.B:P(2|2)) : $2 = -4 \cdot 2 + a_o$
   $2 = -8 + a_o$
   $a_o = 1o$
5. Angabe der analytischen Funktion : $f : x \to -4x + 1o$
6. Um die Richtigkeit des analytischen Ausdrucks zu bestätigen, setzt man die Koordinaten eines weiteren Punktes des Graphen in die gefundene Funktionsgleichung ein (z.B.: P(2,5|o)) $o \overset{?}{=} -4 \cdot 2,5 + 1o$
   $o = o$

Zusammenfassung der Inhalte des Kapitels 5, die Sie sich behalten müssen:

1. Allgemeine lineare Funktionen vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x+a_o$ sind die einfachsten analytischen Funktionen. Es gibt noch viele andere Funktionstypen.

2. Der Graph einer allgemeinen linearen Funktion ist eine Gerade mit der konstanten Steigung a_1, die die y-Achse im Punkt $P(o|a_o)$ schneidet:

3. Die Punkte $P(o|a_o)$ und $P(1|a_1+a_o)$ sind Elemente einer linearen Funktion. (Siehe Zeichnung) Mit ihrer Hilfe kann eine, in analytischer Darstellung gegebene Funktion ohne großen Rechenaufwand graphisch dargestellt werden.

   Umgekehrt kann der analytische Ausdruck einer als Graph gegebenen allgemeinen linearen Funktion über die Koordinaten dieser Punkte leicht berechnet werden. Hierfür bestimmt man die y-Koordinaten der Punkte für x=o und x=1 und berechnet a_o und a_1 nach dem einfachen Verfahren:

   $y(x=o)=a_o$ und $y(x=1)=a_1+a_o$

4. Sind die Koordinaten der Punkte für x=o und x=1 einer als Graph gegebenen allgemeinen linearen Funktion nicht angebbar, so muß man die Konstanten a_o und a_1 nach dem Verfahren berechnen:

   1.Schritt: Man bestimmt die Koordinaten zweier Punkte $P(x_1|y_1)$ und $P(x_2|y_2)$.

   2.Schritt: Man berechnet a_1 nach der Formel
   $$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

   3.Schritt: Man setzt den gefundenen Wert für a_1 in die Funktionsgleichung $y=a_1x+a_o$ für lineare Funktionen ein.

4. Schritt: Man setzt die Koordinaten eines der beiden Punkte in die Funktionsgleichung ein und berechnet die Unbekannte a_0.

5. Schritt: Durch Einsetzen der Koordinaten eines weiteren Punktes kann man die Richtigkeit der gefundenen Funktionsgleichung nachprüfen.

5. Will man den Funktionstyp einer als Wertetabelle gegebenen Funktion bestimmen, so ist es oft besser, diese graphisch darzustellen.

Damit wollen wir den Lehrtext über Relationen und Funktionen abschließen. Wir haben dabei eine Fülle von neuen Begriffen und Methoden kennengelernt, die Sie natürlich nicht alle behalten können. Deshalb werden die Inhalte, die in neuem Zusammenhang immer wieder gebraucht, noch einmal übersichtlich dargestellt.

Zusammenfassung

1. Eine analytische Funktion ist eine eindeutige Relation zwischen zwei Zahlmengen A und B, deren Relationsvorschrift als Rechenvorschrift angebbar ist.

2. Es gibt verschiedene Arten, analytische Funktionen darzustellen:

   a) analytische Darstellung:

   Die analytische Darstellung ist die allgemeinste und knappste, aber auch wichtigste Darstellungsform.

   Form: $f : x \to$ Rechenausdruck für y

   Beispiel: $f : x \to x - 3$

   b) Wertetabelle:

   In der Wertetabelle werden einzelne geordnete Paare der Funktion aufgezählt. Die Wertetabelle stellt stets nur eine Teilmenge der Funktion dar.

   In der Regel müssen die Paare einer Wertetabelle durch Einsetzen von x-Werten in die Funktionsgleichung berechnet werden. Die x-Werte sind nach sinnvollen Kriterien auszuwählen!

   Form: $f : \begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$

   c) graphische Darstellung im Koordinatensystem:

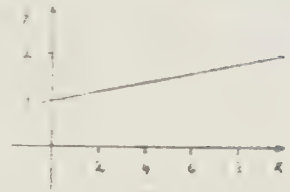
   Die graphische Darstellung ist die übersichtlichste Darstellungsform einer analytischen Funktion in einem Teilbereich $[x_1; x_2]$, $x \in D$

   Durch sie bekommt man einen ersten Eindruck, um welchen Funktionstyp es sich bei Funktionen, die als Wertetabelle gegeben sind, handelt. Maßstab und Ausschnitt sind den darzustellenden Wertebereichen anzupassen.

   Graph der Funktion

   $f: x \to 0{,}1x + 1$

   für $[0; 10]_{\mathbb{Q}}$



3. Zusammenhang zwischen den verschiedenen Darstellungsarten:

Die drei Darstellungsarten analytischer Ausdruck (AA), Wertetabelle (WT) und Graph (GF) sind ineinander überführbar. In nebenstehendem Graph ist das Vorgehen bei Änderung der Darstellungsart kurz erläutert:

Ist der analytische Ausdruck (AA) gegeben, so kommt man zur graphischen Darstellung (GF) nur, wenn man eine Wertetabelle (WT) anfertigt.

Ist WT gegeben, so gewinnt man den AA der Funktion am einfachsten, wenn man WT in GF umwandelt.

Zur Bestimmung einer WT aus GF ist der Weg über AA nicht notwendig.

4. einfache analytische Funktionen

TYP	NAME	GRAPH	PUNKTE	EIGENSCHAFTEN
f: $x \to a_1 x + a_0$	allgemeine lineare Funktion		$P(0\|a_0)$ $P(1\|a_1+a_0)$	Steigung m $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ linear

Spezialfälle allgemeiner linearer Funktionen

f: $x \to a_1 x$ $a_0 = 0$	lineare Funktion		$P(0\|0)$ $P(1\|a_1)$	proportional
f: $x \to a_0$ $a_1 = 0$	konstante Funktion		$P(0\|a_0)$ $P(1\|a_0)$	konstant

Sie sollten die Verfahren kennen, nach denen man die analytischen Ausdrücke linearer Funktionen, die als Wertetabelle oder Graph gegeben sind, bestimmen kann.

Leitprogramm A

BESCHREIBUNG VON UNTERSUCHUNGEN MIT HILFE DER RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Karl Hoffmann
Institut für Didaktik
der Physik

Frankfurt/Main

Aufgabe des Leitprogramms:

1. Es soll Ihre Aufmerksamkeit beim Lesen des Lehrtextes auf bestimmte, wichtige Begriffe und Methoden lenken.

2. Wenn Sie ein Teilgebiet abgeschlossen haben, sollten Sie Ihre Kenntnisse an den Übungsaufgaben im Leitprogramm überprüfen.

3. Im Leitprogramm werden Probleme aufgeworfen, die eine Vertiefung des Stoffes ermöglichen.

Lesen Sie nun bitte S. 1 bis S. 5 Mitte.
Hier geht es um die Probleme, die bei der Planung einer Untersuchung auftreten. Als Beispiel wurde die Untersuchung über "Tempo 130" auf Autobahnen gewählt. Sicher werden Sie fragen: Was hat das mit Mathematik zu tun?
In obigem Lehrtext geht es um die mathematische Beschreibung von Zusammenhängen. Üblicherweise wird dieser Stoff an mathematischen Aufgaben geübt. Wir wollen aber zugleich auch lernen, wo diese Mathematik praktisch angewandt wird. Z.B. bei der Planung und Auswertung von Untersuchungen in Psychologie, Pädagogik, Verkehrsplanung, Physik, Chemie, usw.

Wenn Sie nun beginnen, den Text zu lesen, so schreiben Sie Ihre Fragen auf den Fragezettel im Antwortblatt. Scheuen Sie sich nicht, auch "dumme" Fragen zu stellen. Gerade diese können oft sehr viel zum Verständnis eines Sachverhaltes beitragen.
Damit Sie schon im Voraus wissen, auf welche Begriffe Sie besonders achten müssen, überfliegen Sie kurz die Verständnisfragen zu diesem Abschnitt.

Verständnisfragen:

A 1 Wann sind Aussagen über beobachtbare Größen nachprüfbar?

A 2 Warum ist die Forderung nach Gleichartigkeit der untersuchten Autobahnabschnitte sehr wichtig?

A 3 Wann sind zwei Mengen gleich?

Lesen Sie nun bitte S. 5 Mitte bis S. 8 Mitte.

Verständnisfragen:

A 4 Welcher Unterschied besteht zwischen einer aufzählenden und einer beschreibenden Darstellung einer Menge?

A 5 Was versteht man unter einer Grundmenge?

A 6 Wie liest man folgende beschreibende Darstellung einer Menge
$I = \{T \mid T \text{ ist Vielfaches von } 0{,}7\}_{G=\mathbb{Q}}$?

Rechen/Denkaufgaben:

A 7 Geben Sie die Menge $A = \{v \mid v \text{ ist kleiner } 3\}_{G=\mathbb{Z}}$ in aufzählender Schreibweise wieder.

A 8 Geben Sie die Menge $C = \{4, 8, 12, 16, \ldots\}$ in beschreibender Form wieder.

A 9 Geben Sie die Menge $D = \{s \mid s \text{ ist Vielfaches von } 0{,}23\}_{G=\mathbb{Q}}$ in aufzählender Schreibweise wieder.

A 10 Geben Sie die Menge $M = \{\ldots; -0{,}34; -0{,}17; 0; 0{,}17; 0{,}34; \ldots\}$ in beschreibender Form an.

A 11 Jemand will aus Brettern mit 12,5 cm Breite einen Tisch bauen. Dadurch kann der Tisch nur ganz bestimmte Breiten b haben.

Geben Sie die Elemente von

$B = \{b \mid b \text{ ist mögliche Breite eines Tisches aus 12,5 cm breiten Brettern}\}_{G=Q}$

A 12 Bei einem Dominospiel möge jemand folgende Steine haben:

K =

Geben Sie die gemeinsame Eigenschaft der Elemente von K an.

A 13 Überlegen Sie sich nun selbst eine Menge und geben Sie diese in <u>aufzählender</u> Form wieder.

A 14 Überlegen Sie sich nun selbst eine Menge und geben Sie diese in <u>beschreibender</u> Form wieder.

Lesen Sie nun bitte S. 8 bis S. 11.
Nach dem Lesen beantworten Sie bitte folgende Fragen:

A 15 Was bedeutet "geordnet"?

A 16 Wann sind zwei geordnete Paare gleich?

A 17 Was ist eine Paarmenge?

A 17a Wie nennt man die Grundmenge einer Paarmenge?

A 17b Welcher Unterschied besteht zwischen einer Paarmenge und einer Produktmenge A × B?

A 18 Geben Sie eine Paarmenge mit drei geordneten Paaren aus $R = \{E1, E5, E9\}$ und $Z = \{100\text{km/h}, 120\text{ km/h}, 140\text{ km/h}\}$ an.

A 19 Geben Sie eine Paarmenge mit 5 geordneten Paaren aus R × R an, wenn $R = \{1{,}2;\ 2{,}3;\ 17\}$

A 20 1 Liter Eisen ist <u>doppelt</u> so schwer wie 1 Liter Sand. Geben Sie 3 geordnete Paare (a|b) aus A × A an, für die gelten "a Liter Eisen sind schwerer als b Liter Sand".
$A = \{1;\ \frac{3}{4};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{10}\}$

A 21 Überlegen Sie sich nun selbst eine Paarmenge mit 3 geordneten Paaren, bei der ein sinnvoller Zusammenhang zwischen zweiter und erster Komponente besteht.

A 22 Welche der folgenden geordneten Paare (s|t) sind <u>nicht</u> geordente Paare von A = {in BRD <u>hergestellte</u> Landwirtschaftsprodukte} und B = {Anteil am Export in %}?

1) (Kartoffeln|17%) 2) (Kakao|4%) 3) (Zitronen|29%)
4) (100%|Mais) 5) (Zuckerrüben| 20%) 6) (Traktoren|2%)

Lesen Sie nun bitte den Abschnitt über Relationen und ihre Darstellungen (von S. 12 bis S. 14 unten).
Hier werden Sie nichts prinzipiell Neues lernen. Schon früher haben Sie es häufig mit Relationen zu tun gehabt. Nur nannte man Sie nicht so. Jetzt aber wollen wir zu einer weiteren Untersuchung lernen, wie man die Relationen in aufzählender Form darstellen kann.
Achten Sie beim Lesen darauf, daß Sie hinterher folgende Frage beantworten können.

A 23 Was ist eine Zuordnungsvorschrift?

Lesen Sie nun bitte S. 14 unten bis S. 18 unten.
Das Wichtigste dieses Abschnittes ist die beschreibende Paarmengendarstellung, bei der der Zusammenhang zwischen zwei Größen durch einen Rechenausdruck ausgedrückt wird.

<u>Verständnisfragen:</u>

A 24 Welche aufzählenden Darstellungen für Relationen haben Sie bisher kennengelernt?

A 25 Wodurch zeichnet sich das Pfeildiagramm vor den übrigen Darstellungsformen aus?

A 25a Was ist der wesentliche Vorteil einer beschreibenden gegenüber einer aufzählenden Darstellung?

A 26 Wie liest man $P = \{(a \text{ in km} \mid b \text{ in Liter}) \mid b = 0{,}1 \cdot a\}_{N \times Q}$?

A 27 Stellen Sie 5 geordnete Paare der Relation
$R = \{(\text{Schülerzahl } n \mid \text{Luftbed. } b \text{ in L/min}) \mid b = 10 \cdot n\}_{N \times N}$
als Wertetabelle <u>und</u> Pfeildiagramm dar.

A 28 Stellen Sie zur Relation $K = \{(a \text{ in km} \mid b \text{ in Liter}) \mid b = 0{,}12 \cdot a\}_{N \times Q}$ eine Wertetabelle mit 4 geordneten Paaren auf.

A 29 Wenn Sie sich bei der Bank Geld leihen wollten, so müssen Sie für einen Kredit von a DM pro Jahr b DM Zinsen zahlen. Bei 13% Zinsen läßt sich der Zusammenhang zwischen a und b durch folgende Relation darstellen:
$R = \{(\text{Kredit } a_N \mid \text{Zinsen } b_N) \mid \frac{b}{a} = 0{,}13\}_{Q \times Q}$
Stellen Sie hierzu eine Wertetabelle mit 5 geordneten Paaren auf.

A 30 Denken Sie sich selbst eine Relation aus, stellen Sie diese in beschreibender Form dar und fertigen Sie ein Pfeildiagramm hierzu an.

A 31 Geben Sie die beschreibende Paarmengendarstellung für folgendes Experiment an. Jemand wollte wissen, wie oft er im Mittel würfeln muß, um 1,2,3,... mal eine 2 zu bekommen. Er fand im Mittel folgendes Ergebnis:

W:							
n Würfe	6	12	18	24	30	. . .	
kmal die 2	1	2	3	4	5	. . .	

A 32 Wenn man sich Zement kauft, so stehen die Kosten t (in DM) für die Anlieferung pro Zentner Zement in einem bestimmten Zusammenhang zu der bestellten Menge k_{Zt}

Z:							
k_{Zt}	1	2	3	4	5	. . .	
t_{DM}	$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	. . .	

Geben Sie die beschreibende Paarmengendarstellung dieser Relation an.

Wiederholen Sie nun die wesentlichen Inhalte an Band von S. 19 bis S. 20 Mitte.

Lesen Sie nun bitte S. 20 Mitte bis S. 23.

A 33 Welcher bedeutsame Unterschied besteht zwischen einer Relation und einer Funktion?

A 34 Woran erkennt man, daß eine Relation keine Funktion ist?

A 35 Auf welche Elemente beziehen sich die Begriffe "Argumentmenge/Definitionsbereich" und "Wertebereich/Bildmenge"?

A 36 Was ist eine reelle Funktion?

A 37 Welche der folgenden Relationen ist keine Funktion?

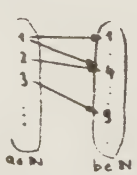
a)

r	0	1	1	1	1
s	0	1	2	3	4

b)

t	1	2	3	4	5
n	1	1	1	1	1

c)



d)

e) $A = \{(u|v) \mid v + u = 5\}_{N \times N}$

f) $B = \{(r|s) \mid r+s=6\}_{A \times N}$ mit $A = \{1,2,3,4,5\}$

g) $C = \{(x|y) \mid y = 3x\}_{N \times N}$

A 38 Geben Sie für folgende Relationen den Definitionsbereich D an (notfalls zeichnen Sie das Pfeildiagramm, falls Sie nicht weiterkommen).

a) $K = \{(x|y) \mid x + y = 4\}_{N \times N}$

b) $L = \{(r|s) \mid s = 1{,}5 \cdot r\}_{N \times N}$

c) $M = \{(t|u) \mid u = t - 1\}_{N \times N}$

Lesen Sie nun bitte von S. 24 bis S. 26 unten.
Bei diesem Abschnitt werden Sie lernen, wie man Wertetabellen (geordnete Paare) graphisch darstellen kann. Auch diese Darstellungsform ist Ihnen sicher schon einmal begegnet. Ihr wesentlicher Vorteil gegenüber bisher gelernten Formen liegt in der Anschaulichkeit.

Nach dem Lesen sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

A 39 Warum benötigt man zur Darstellung eines geordneten Paares zwei Achsen?

A 40 Auf welcher Achse werden die Elemente des Definitionsbereichs dargestellt?
Auf welcher Achse werden die Elemente des Wertebereiches dargestellt?

A 41 Wann versieht man einen Platzhalter mit einem Index (z.B. x_1)?

A 42 Wie kommt man von einem geordneten Paar $(x_1|y_1)$ zum Punkt $P(x_1|y_1)$?

A 43 Welche Vorzeichen haben die beiden Koordinaten im IV. Quadranten?

A 44 Das Wachstum W einer Pflanze wird entscheidend durch die Temperatur $T_{°C}$ beeinflußt. In der folgenden Tabelle ist dies für eine bestimmte Pflanze dargestellt:

T in °C	0	18	30	40
W in mm/Tag	0	10	30	7

Stellen Sie diese Wertetabelle graphisch dar.

A 45 Jemand möchte feststellen, wie genau seine Uhr geht. Deshalb vergleicht er jeden Tag seine Uhrzeit mit der Zeit, die die genaugehende Bahnhofsuhr anzeigt. Er erhielt folgende Abweichungen A_{min} (wenn A negativ, so bedeutet das: Die Uhr geht nach!)

nach t Tagen	1	2	3	4
A in min	-2	-4	-5	-6

Stellen Sie diese Funktion graphisch dar. Schraffieren Sie die Quadranten, die man nicht zur Darstellung benötigt. Finden Sie die angegebenen Maßstäbe sinnvoll?

A 45a Versuchen Sie, für die Funktion aus A 45 Maßstäbe aufzufinden, durch die die Punkte besser eingezeichnet werden können.

Lesen Sie nun bitte S. 27 bis S. 30.
Dieser Abschnitt wird Ihnen sicher einige Schwierigkeiten bereiten. Sie sollten dabei lernen, welche Überlegungen man anstellen muß, bevor man eine Wertetabelle graphisch darstellen kann. Noch etwas. Wenn in diesem Abschnitt der Maßstab errechnet wird, so heißt das nicht, daß diese Rechnungen unbedingt immer durchgeführt werden müssen. Sie stellen nur eine Faustregel dar zur Bestimmung von Maßstäben. Mit einiger Erfahrung schaut man sich nur noch den Definitionsbereich (x-Werte) und Wertebereich (y-Werte) an und peilt über den Daumen.

Diejenigen, die lieber durch Erfahrung lernen, können diese Seiten auch überspringen. Allerdings werden Sie dann bei späteren Aufgaben länger nachdenken müssen, welchen Maßstab sie zu wählen haben.

Folgende Probleme sollten Sie beim Lesen im Kopf haben:

A 46 Wie bestimmt man den Ausschnitt aufgrund der Vorzeichen der x- und y-Werte in der Wertetabelle?

A 47 Wie bestimmt man den Maßstab für eine Achse (x- oder y-Achse), wenn man den größten und kleinsten Wert für x oder y aus der Wertetabelle abgelesen hat?

A 48 Am 19. November wurden für verschiedene Uhrzeiten t_h folgende Temperaturen $T_{°C}$ in Stockholm gemessen.

K: t_h	4	9	16	23
$T_{°C}$	-10	-1	5	-3

Zeichnen Sie den Graph der Funktion K.

A 49 Stellen Sie folgende Wertetabelle graphisch dar:

f: a	0,1	0,7	0,9	1,1
b	-100	-700	-900	-1100

A 50 Stellen Sie folgende Funktion graphisch dar:

$r = \{(u|v) \mid v = -3u\}_{A \in N}$ für $A = \{0,2,4,6\}$

A 51 Fragen Sie 4 Ihrer Mitschüler nach dem Körpergewicht g_{kg} und ihrer Körperlänge l_m. Stellen Sie diese 4 geordneten Paare (g|l) graphisch dar.
Gilt für Ihre "kleine" Untersuchung: "Je größer g desto größer l"?

Lesen Sie bitte S. 31 bis S. 35.
Dieser Abschnitt über analytische Funktionen und ihre Darstellung (analytische Darstellung, Wertetabelle, Graph) ist sehr wichtig, da sehr viele Wissenschaften ihre Ergebnisse in analytischer Form darstellen. Wesentlicher Grund ist: Wenn die analytische Form eines Zusammenhangs bekannt ist, so kann für beliebiges $x \in D$ der zugehörige y-Wert angegeben werden, während durch Wertetabellen stets nur Teilmengen der geordneten Paare dargestellt werden können.

Folgende Punkte sind wichtig:

A 52 Was bedeutet die Schreibweise $f: x \to y = f(x),\ x \in D$?

A 53 Welcher wesentliche Unterschied besteht zwischen der analytischen Darstellung $f: x \to y = f(x)$ und einer Wertetabelle?

A 54 Wie erhält man aus einer analytischen Darstellung den Graph der Funktion?

Sehen Sie sich nun noch das weitere Beispiel S. 36 an. Dann lösen Sie folgende Aufgaben:

A 55 Zeichnen Sie für folgende Funktionen den Kurvenverlauf im jeweils angegebenen Bereich:

a) $f: v_{km/h} \rightarrow s_m = \frac{v^2_{km/h}}{100} + 10$ für $v_{km/h} \in [0; 50]_{\mathbb{Q}}$

b) $k: a \rightarrow b = -\frac{a}{1,7} + 1$ für $a \in [-10; 10]_{\mathbb{Q}}$

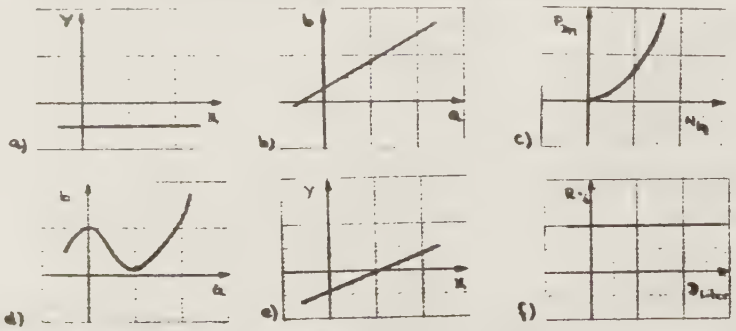
c) Die Wahrscheinlichkeit W, aus einem Topf mit N Losen einen Gewinn zu ziehen, könnte durch folgende Funktion beschreibbar sein:

$l: N \rightarrow W = \frac{4}{N}$ für $N \in [1; 40]_{\mathbb{N}}$

d) Überlegen Sie sich nun selbst eine analytische Funktion und stellen Sie diese dar!

Lesen Sie nun S. 37 und S. 38. Dies stellt eine Wiederholung der wichtigsten Inhalte dar, die Sie auch weiterhin brauchen.
Sie sollten darauf achten, daß Sie alle diese Inhalte beherrschen. Wenn nicht, lesen Sie die entsprechenden Inhalte noch einmal oder fragen Sie!

Lesen Sie nun S. 39 bis S. 42.
In den nun folgenden Abschnitten wollen wir lernen, wie man für Untersuchungsergebnisse, die als Wertetabellen oder Graphen vorliegen, den analytischen Ausdruck (Funktionsgleichung) bestimmen kann. Allerdings beschränken wir uns hier auf die einfachsten Fälle.
Nehmen Sie an, Untersuchungen lieferten angenähert folgende Kurven und Sie sollen sagen, welche Funktionsgleichungen zu diesen Kurven gehören:



Dann werden Sie sicher sagen, "Das weiß ich nicht". Aber aufgrund der Ähnlichkeit von a) und f) (beide Kurven sind Parallelen zur x-Achse) und b) und e) (beide sind Geraden) könnten Sie vermuten, daß diese Funktionen ähnliche Funktionsgleichungen besitzen. Das ist richtig! Allerdings wissen Sie damit noch nicht, welchen Funktionsgleichungen diese Graphen entsprechen.
Deshalb werden wir erst einmal lernen, welchen Funktionsgleichungen welche Graphen entsprechen, um dann zu wissen, welchen Graphen welche Funktionsgleichungen entsprechen.

Beim Durchlesen beachten Sie folgende Fragen:

A 56 Welche Funktionsgleichung entspricht der konstanten Funktion?

A 57 Was ist eine Kurve?

A 58 Bei welchem y-Wert schneidet die konstante Funktion die y-Achse?

A 59 Wie wird der Graph einer konstanten Funktion bezeichnet?

A 60 Wieviel Punkte braucht man, um eine konstante Funktion zu zeichnen?

A 61 Zeichnen Sie die folgenden Funktionen:
a) $k: s \rightarrow a_0$ mit $a_0 = 3,1$ im Bereich $[-10; +10]_{\mathbb{Q}}$
b) $g: s \rightarrow c_0$ mit $c_0 = -3$ im Bereich $[-2; 2]_{\mathbb{Z}}$
c) Die Körpergröße l eines Erwachsenen ist im Alter a_{Jahre} von 20 bis 45 ungefähr konstant. Für eine bestimmte Person möge $l_m = 1,84$ sein. Stellen Sie dieses Ergebnis graphisch dar.
d) Überlegen Sie sich nun selbst ein Beispiel aus Ihrer Umwelt, bei dem der Zusammenhang zwischen den betrachteten Größen eine konstante Funktion darstellt. Zeichnen Sie diese Funktion. (Achsenbezeichnung und Angabe der Bedeutung der Zahlen nicht vergessen!)

Lesen Sie nun S. 43 bis S. 46 Mitte.
Nachdem Sie nun die Eigenschaften einer Funktion vom Typ $f: x \rightarrow a_0$ kennengelernt haben, sollte es Ihnen nicht schwerfallen, an Hand des Graphen einer Funktion zu erkennen, ob es sich um eine konstante Funktion handelt. Die Bestimmung von a_0 ist dann nur noch eine einfache Ableseübung.

Denken Sie beim Lesen an folgende Fragen:

A 62 Über welche wesentlichen Schritte läuft die Bestimmung der Funktionsgleichung einer unbekannten Funktion?

A 63 An welcher Darstellungsform erkennt man am ehesten den Funktionstyp (Wertetabelle, Graph, Pfeildiagramm,...)?

A 64 Welchen Einfluß auf den Graphen einer konstanten Funktion hat die Veränderung des Wertes für die Formvariablen a_0?

A 65 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen folgender Funktionen soweit möglich.

A 66 Zeichnen Sie eine beliebige konstante Funktion und geben Sie deren Funktionsgleichung an.

A 66a Welche der folgenden Zusammenhänge stellen keine konstanten Funktionen dar:

a) Zusammenhang zwischen mittlerer Zimmertemperatur T_{oC} und der Heizkosten $k_{DM/Tag}$.

b) Zusammenhang zwischen dem mittleren Benzinverbrauch V_{Liter} p=100 km und der gefahrenen Strecke s.

c) Zusammenhang zwischen Konzentrationsfähigkeit k und der Tageszeit t_h in der Schule.

d) $f: r \to \frac{3}{r}$

e) $g: s \to 3 + 4$

f) $h: t \to 3 + t^2$

Die konstante Funktion ist nur zur Beschreibung einfachster Zusammenhänge, bei denen eine Größe sich nicht ändert, zu verwenden.
Nun werden wir die lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1x$ kennen und erkennen lernen. Mit ihr können Zusammenhänge beschrieben werden, bei der die eine Größe sich verdoppelt, wenn die andere Größe sich verdoppelt.

Lesen Sie nun bitte S. 46 Mitte bis S. 48 Mitte.

Fragen:

A 67 Was bedeutet "y ist proportional zu x"?

A 68 Stimmt folgende Aussage für lineare Funktionen:
"Wenn sich der Wert für x verdoppelt, dann verdoppelt sich der y-Wert."

A 69 Erklären Sie, warum bei linearen Funktionen gilt:
"Unabhängig von a_1 ist stets y = 0 für x = 0 (Ursprungsgerade)."

A 70 Wie groß ist der Funktionswert y einer linearen Funktion für x = 1?

A 71 Welchen Einfluß auf den Graph hat das Vorzeichen von a_1?

A 72 Zeichnen Sie folgende Funktionen:

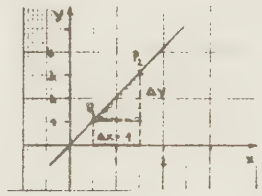
a) $f: r \to +2{,}1 \cdot r$ für $[-2;2]_Q$

b) $g: s \to -0{,}17$ für $[-20;20]_Q$

c) Der Zusammenhang zwischen mittlerem Benzinverbrauch V_{Liter} und den gefahrenen Kilometern läßt sich durch eine lineare Funktion ($f: x \to a_1x$) darstellen. Dabei gilt für einen VW 1300, daß der Benzinverbrauch V_{Liter} etwa 0,08 mal so groß wie der zurückgelegte Weg s_{km} ist. Stellen Sie diesen Zusammenhang graphisch dar für $s_{km} \in [0;300]_Q$.

d) Überlegen Sie sich nun selbst eine lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1x$ und zeichnen Sie diese. (Möglichst ein Beispiel aus Ihrer Umwelt.)

A 73



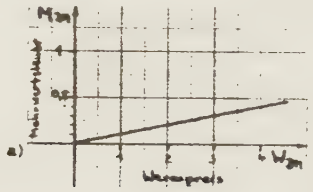
Betrachten Sie noch einmal den von Ihnen gezeichneten Graph A 72a). Sie sollen nun für A 72a) die Höhendifferenz Δy zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 bestimmen, wenn diese Punkte in x-Richtung um 1 Einheit entfernt sind. Zeichnen Sie hierzu an einer beliebigen Stelle der Geraden einen Punkt P_1 ein, gehen Sie 1 Einheit nach rechts und lesen Sie Höhendifferenz Δy ab. Sie werden dann etwas Überraschendes feststellen. Egal, welchen Punkt man für P_1 gewählt hat, immer erhält man für $\Delta x = 1$ den gleichen Wert für Δy. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert Δy mit a_1 aus der Funktionsgleichung von A 72a).

Was stellen Sie fest?

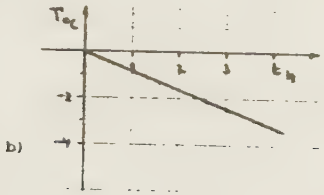
Wenn Sie A 73 lösen konnten, dann haben Sie sich vielleicht gewundert, warum für zwei beliebige Punkte P_1 und P_2, die um $\Delta x = 1$ voneinander entfernt sind, stets eine Höhendifferenz Δy vorhanden ist, die gleich der Formvariablen a_1 der entsprechenden Funktionsgleichung ist. Es ist allerdings kein Wunder, sondern eine allgemeingültige Eigenschaft linearer Funktionen.

Lesen Sie nun den entsprechenden Beweis nach (S. 48 bis S. 49 Mitte). Überprüfen Sie diese Formel an folgenden linearen Zusammenhängen, indem Sie für 2 Punkte P_1 und P_2 jeweils a_1 berechnen.

A 74 $M_{DM} = 0{,}1 \cdot W_{DM}$ $T_{oC} = -0{,}8 \cdot t_h$



a)



b)

Nun haben Sie eigentlich schon gelernt, wie man die Formvariable a_1 aus einem als Graph oder Wertetabelle gegebenen Untersuchungsergebnis berechnen kann, falls es sich um eine lineare Funktion handelt.

Lesen Sie nun bitte S. 49 Mitte bis S. 53 unten. Dort ist das Verfahren zur Berechnung von a_1 noch einmal ausführlich erklärt.

A 75 Über welche vier Stufen verläuft die Bestimmung einer analytischen Funktion aus einem Graphen, falls es sich um eine lineare Funktion handelt?

A 76 Wie kann man feststellen, ob die berechnete Funktionsgleichung die als Wertetabelle oder Graph gegebene Funktion auch richtig beschreibt?

A 77 Warum erfüllen die Koordinaten einer als Wertetabelle oder Graph gegebenen Funktion nicht immer die berechnete Funktionsgleichung exakt?

A 78 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung (soweit möglich) für folgende Zusammenhänge:

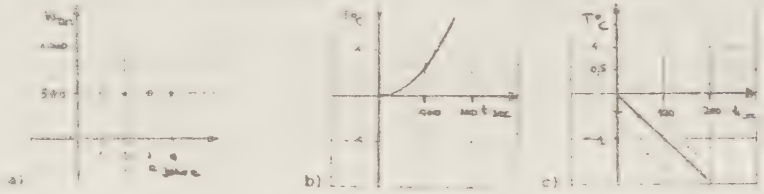
a)

Netto Betrag N_{DM}	1	2	4	5
Mehrwertsteuer M_{DM}	0,11	0,22	0,44	0,55

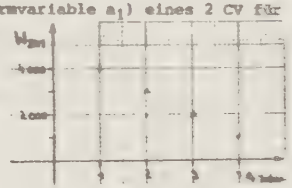
b)

t_{sec}	0	10	20	30
S_m	0	100	400	900

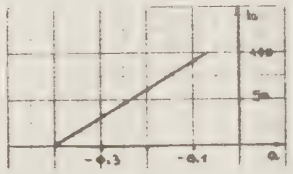
A 79



A 80a Bestimmen Sie den Wertverlust pro Jahr (Formvariable a_1) eines 2 CV für die ersten fünf Jahre an Hand des Graphens



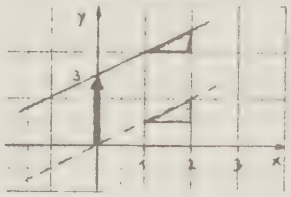
A 80b Bestimmen Sie a_1 für folgende Funktion



A 81 Nehmen Sie an, folgende zwei Meßpunkte eines linearen Zusammenhangs seien bekannt: $P_1(1,5 \mid -0,6)$ und $P_2(3 \mid -1,2)$. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

A 82 Zeichnen Sie nun selbst irgendeine lineare Funktion und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung.

Wir haben uns bisher mit relativ speziellen Geraden beschäftigt, die entweder Parallelen zur x-Achse (konstante Funktion $f: x \to a_0$) oder Ursprungsgeraden (lineare Funktion $f: x \to a_1 x$) darstellten.
Wesentlich häufiger jedoch wird man dem Fall begegnen, daß die Gerade weder parallel zur x-Achse noch durch den Ursprung verläuft. Was dann?



Dann wissen wir immerhin schon, daß die Steigung genau so groß ist wie die Steigung derjenigen Geraden, die parallel zu ihr durch den Ursprung verläuft.
Man könnte nun einfach folgern:
Auch Geraden, die nicht durch den Ursprung verlaufen, sind lineare Funktionen mit $y = a_1 \cdot x$. Da ist nur ein Haken. Für $x = 0$ wäre der zugehörige y-Wert auch Null. Und das soll ja nun nicht mehr vorausgesetzt werden. Im obigen Beispiel ist $y(\text{für } x=0) = 3$; also muß man Funktionsgleichung $y = a_1 \cdot x$ so verändern, daß für $x = 0$ der Funktionswert $y = 3$ ist. Nichts einfacher als das: $y = a_1 x + 3$ liefert für $x = 0$ den Funktionswert $y = 3$.

Bei einer allgemeinen Geraden müssen wir also noch einen Summanden a_0 (im obigen Beispiel $a_0 = 3$) auf der rechten Seite der Funktionsgleichung für lineare Funktionen zulassen.
Die Funktionsgleichung solcher Geraden, allgemeine lineare Funktionen genannt, lautet dann $y = a_1 x + a_0$.

Lesen Sie nun bitte S. 54 bis S. 56 Mitte.

A 83 Worin unterscheidet sich die allgemeine lineare Funktion von einer linearen Funktion (Ursprungsgeraden)?

A 84 Welche Funktionstypen erhält man als Spezialfall einer allgemeinen linearen Funktion

a) für $a_0 = 0$ und b) für $a_1 = 0$?

A 85 Welche zwei Punkte einer allgemeinen linearen Funktion sind stets leicht zu berechnen?

A 86 Zeichnen Sie die Funktion

a) $g: r \to r - 2$ für $[-2;2]_{\mathbb{Q}}$

b) Ein Betonlieferwerk macht die Transportkosten T_{Dm}, die der Käufer pro Tonne gelieferten Betons zahlen muß, abhängig von der zu liefernden Gesamtmenge G_{Tonnen}. Jemand, der viel Beton kauft, soll weniger Transportkosten pro Tonne zahlen als jemand, der wenig bestellt. Sie berechnen T_{Dm} nach folgender Formel

$$T_{Dm} = 4 - \frac{G_{Tonnen}}{6} \quad \text{für } G_{Tonnen} \in [0;20]_{\mathbb{Q}}$$

c) Zwischen dem Verkaufswert V_{Dm} eines VW 1200 und dem Alter a_{Jahre} des Wagens besteht angenähert ein allgemeiner linearer Zusammenhang. Für $a_{Jahre} = 0$ (Neukauf) beträgt $V_{Dm} = 4500$. Pro Jahr fällt der Verkaufswert V_{Dm} um 500. Mit diesen zwei Angaben können Sie die Funktionsgleichung sofort hinschreiben. Zeichnen Sie die Funktion für $a_{Jahre} \in [0;5]_{\mathbb{Q}}$

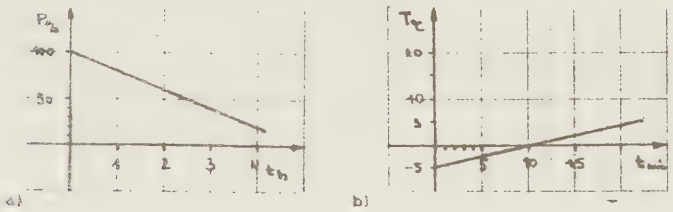
d) Geben Sie sich nun selbst eine allgemeine lineare Funktion vor und zeichnen Sie sie im Bereich $[0;20]_{\mathbb{Q}}$

Wir kommen nun zum Schluß des Lehrtextes. Wir haben zuletzt die allgemein lineare Funktion kennengelernt und wollen auch diesmal wieder die Bestimmung der Funktionsgleichung üben. Betrachten wir noch einmal die allgemeine Funktionsgleichung dieses Typs

$$y = a_1 x + a_o ,$$

so sieht man, daß wir diesmal zwei Unbekannte bestimmen müssen; nämlich die Formvariablen a_1 und a_o.
Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Größen a_1 und a_o geht über die Punkte $P(0|a_o)$ und $P(1|a_1+a_o)$, deren y-Koordinaten in sehr einfacher Beziehung zu a_o und a_1 stehen.
Lesen Sie nun bitte S. 56 unten bis S. 58.

A 87 Bestimmen Sie für folgende Untersuchungen die Funktionsgleichungen.



Sehr häufig ist das einfache Verfahren nicht anwendbar, da die Koordinaten der Punkte $P(0|a_o)$ und $P(1|a_o+a_1)$ nicht angebbar sind.
Dann aber muß man zuerst a_1 (wie bei linearen Funktionen) mit Hilfe der Steigungsformel $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnen. Hat man a_1 bestimmt, so ist nur noch a_o unbekannt.

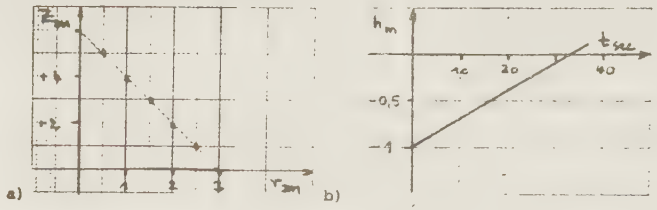
a_o erhält man durch folgende Überlegung:
Wenn die gesuchte Funktionsgleichung die gegebene Funktion richtig beschreibt, so muß die y-Koordinate eines Punktes der Geraden durch die gesuchte Funktionsgleichung bestimmbar sein.
Wir setzen deshalb die Koordinaten eines Punktes der Geraden und den berechneten Wert für a_1 in die allgemeine Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_o$ ein.

In dieser Gleichung ist nur noch a_o unbekannt und wir können es berechnen.

Lesen Sie nun bitte S. 59 und S. 60, wo dieses Verfahren ausführlich dargestellt ist.

A 88 Geben Sie stichwortartig den Weg an, wie man für allgemeine lineare Funktionen aus Wertetabellen oder Graphen a_o und a_1 immer bestimmen kann.

A 89 Bestimmen Sie für folgende Funktionen den analytischen Ausdruck:



c) Wenn ein Schiff leck schlägt, so kann man ungefähr berechnen, wie lange es dauert, bis es sinkt. Man bestimmt für zwei Zeitpunkte t_{sec} die Höhe h_m des Schiffdecks über dem Wasserspiegel und berechnet für diese zwei Wertepaare $(t|h)$ die Funktionsgleichung. (Vorausgesetzt wird ein allgemeiner linearer Zusammenhang zwischen t und h.)
Nehmen Sie nun an, Sie hätten folgende Wertepaare $(t_{sec}|h_m)$ bestimmt:
$(0|12)$ und $(1|9)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?

d) Zeichnen Sie selbst eine allgemeine lineare Funktion und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung nach obigem Verfahren.

Leitprogramm B

RELATIONEN UND FUNKTIONEN

Karl Hoffmann
Institut für
Didaktik der Physik

Frankfurt/Main

Aufgabe des Leitprogramms:

1. Es soll Ihre Aufmerksamkeit beim Lesen des Lehrtextes auf bestimmte, wichtige Begriffe und Methoden lenken.
2. Wenn Sie ein Teilgebiet abgeschlossen haben, sollten Sie Ihre Kenntnisse an den Übungsaufgaben im Leitprogramm überprüfen.
3. Im Leitprogramm werden Probleme aufgeworfen, die eine Vertiefung des Stoffes ermöglichen.

Lesen Sie nun bitte S. 1 bis S. 5(einschließlich Teilmenge). Wenn Ihnen dabei etwas unverständlich bleibt, schreiben Sie Ihre Frage auf den Fragezettel im Antwortblatt. Scheuen Sie sich nicht, auch "dumme" Fragen zu stellen. Gerade diese können oft sehr viel zum Verständnis eines Sachverhaltes beitragen.

Damit Sie schon im Voraus wissen, auf welche Begriffe Sie besonders achten müssen, überfliegen Sie kurz die Verständnisfragen zu diesem Abschnitt.

Verständnisfragen:

A 3 Wann sind zwei Mengen gleich?

A 4 Welcher Unterschied besteht zwischen einer aufzählenden und einer beschreibenden Darstellung einer Menge?

A 5 Was ist eine Grundmenge?

A 6 Wie liest man folgende beschreibende Darstellung einer Menge?

$$M = \{x \mid x \text{ ist Vielfaches von } 0{,}7\}_{G=\mathbb{Q}}$$

Rechen/Denkaufgaben:

A 7 Geben Sie die Menge $M = \{x \mid x \text{ ist kleiner } 3\}_{G=\mathbb{Z}}$ in aufzählender Schreibweise wieder.

A 8 Geben Sie die Menge $M = \{4,8,12,16,\ldots\}$ in beschreibender Form wieder.

A 9 Geben Sie die Menge $M = \{x \mid x \text{ ist Vielfaches von } 0{,}23\}_{G=\mathbb{Q}}$ in aufzählender Schreibweise wieder.

A 10 Geben Sie die Menge $M = \{\ldots;-0{,}34;-0{,}17;0;0{,}17;0{,}34;\ldots\}$ in beschreibender Form an.

A 11 Geben Sie die Menge $M = \{x \mid x \text{ ist teilbar durch } 2{,}5\}_{G=\mathbb{N}}$ in aufzählender Form wieder.

A 12 Geben Sie die Menge $M = \{13,22,31,40\}$ in beschreibender Form an.

A 13 Überlegen Sie sich nun selbst eine Menge und geben Sie diese in aufzählender Form an.

A 14 Überlegen Sie sich eine Menge und geben Sie diese in beschreibender Form an.

Lesen Sie nun bitte S. 5 Mitte bis S. 7 Mitte.
Nach dem Lesen beantworten Sie bitte folgende Fragen:

Verständnisfragen:

A15 Was bedeutet "geordnet"?

A16 Wann sind zwei geordnete Paare gleich?

A17 Was ist eine Paarmenge?

A17a Wie nennt man die Grundmenge einer Paarmenge?

A17b Welcher Unterschied besteht zwischen einer Paarmenge und einer Produktmenge $A \times B$?

Rechen/Denkaufgaben:

A 18 Geben Sie eine Paarmenge mit 3 geordneten Paaren aus
$A = \{1,2,3\}$ und $B = \{a,b,c\}$ an.

A 19 Geben Sie eine Paarmenge mit 5 geordneten Paaren aus $A \times A$ an, wenn
$A = \{1,9,2,3,17\}$

A 20 Geben Sie eine Paarmenge mit 3 geordneten Paaren aus $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ an, so daß die zweite Komponente jedes geordneten Paares das 3fache der ersten Komponente darstellt.

A 21 Geben Sie eine Paarmenge mit 3 geordneten Paaren an, bei der ein sinnvoller Zusammenhang zwischen zweiter und erster Komponente besteht.

A 22 Welche der folgenden geordneten Paare sind nicht in der Produktmenge $A \times B$ enthalten?
$A = \{1,2,a,b\}$ und $B = \{4,a,b,z\}$

1) $(1|a)$ 2) $(1|3)$ 3) $(b|z)$ 4) $(4|b)$
5) $(4|2)$ 6) $(b|b)$ 7) $(5|8)$ 8) $(1|z)$

Lesen Sie nun den Abschnitt über Relationen und ihre Darstellungen (von S. 7 Mitte bis S. 11 Mitte).

Denken Sie daran, daß Sie schon häufig in Mathematik Relationen verwendet haben. Man nannte Sie nur nicht so. Nun sollen Sie lernen, wie Relationen dargestellt werden können. Achten Sie beim Lesen darauf, daß Sie folgende Fragen hinterher beantworten können:

A 23 Was ist eine Zuordnungsvorschrift?

A 24 Welche aufzählenden Darstellungen für Relationen haben Sie bisher kennengelernt?

A 25 Wodurch zeichnet sich das Pfeildiagramm vor den übrigen Darstellungsformen aus?

A 25a Was ist der wesentliche Vorteil einer beschreibenden gegenüber einer aufzählenden Darstellung?

A 26 Wie liest man $P = \{(x|y) \mid y = 0{,}1 \cdot x\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$?

A 27 Stellen Sie die Relation $R = \{(x|y) \mid x + y = 5\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ als Wertetabelle und Pfeildiagramm dar.

A 28 Stellen Sie zur Relation $R = \{(x|y) \mid y = 0{,}12 \cdot x\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$ eine Wertetabelle auf.

A 29 Stellen Sie zur Relation $R = \{(x|y) \mid \frac{x}{y} = 0{,}13\}_{\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}}$ eine Wertetabelle auf.

A 30 Denken Sie sich selbst eine Relation aus, stellen Sie diese in beschreibender Form dar, und fertigen Sie ein Pfeildiagramm hierzu an.

A 31 Geben Sie die beschreibende Paarmengendarstellung für folgende Relation an:

P:

x	6	12	18	24	30	. . .
y	1	2	3	4	5	. . .

A 32 P:

x	1	2	3	4	5	. . .
y	$\frac{10}{1}$	$\frac{10}{2}$	$\frac{10}{3}$	$\frac{10}{4}$	$\frac{10}{5}$	. . .

Wiederholen Sie nun die wesentlichen Inhalte an Hand von S. 11 bis S. 13 oben.

Lesen Sie nun bitte S. 13 oben bis S. 15. Hier wollen wir uns mit einem sehr speziellen Typ einer Relation, der Funktion, beschäftigen. Beachten Sie folgende Fragen beim Durchlesen:

A 33 Welcher bedeutsame Unterschied besteht zwischen einer Relation und einer Funktion?

A 34 Woran erkennt man, daß eine Relation keine Funktion ist?

A 35 Auf welche Elemente beziehen sich die Begriffe "Argumentmenge/Definitionsbereich" und "Wertebereich/Bildmenge"?

A 36 Was ist eine reelle Funktion?

A 37 Welche der folgenden Relationen ist keine Funktion?

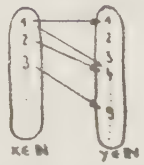
a) $\frac{x}{y}$

D	1	1	1	1
D	1	2	3	4

b) $\frac{x}{y}$

1	2	3	4	5
1	1	1	1	1

c)



d)

e) $P = \{(x|y) \mid x+y = 5\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

f) $P = \{(x|y) \mid x+y = 6\}_{A\times\mathbb{N}}$ mit $A = \{1,2,3,4,5\}$

g) $P = \{(x|y) \mid y = 3x\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

A 38 Geben Sie für folgende Relationen den Definitionsbereich D an (notfalls zeichnen Sie das Pfeildiagramm, falls Sie nicht weiterkommen).

a) $P = \{(x|y) \mid x + y = 4\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

b) $P = \{(x|y) \mid y = 1{,}5\cdot x\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

c) $P = \{(x|y) \mid x = y + 1\}_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$

Lesen Sie nun bitte von S. 16 bis S. 19 oben.

Bei diesem Abschnitt werden Sie lernen, wie man geordnete Paare graphisch darstellen kann. Auch diese Darstellungsform ist Ihnen sicher schon einmal begegnet. Ihr wesentlichster Vorteil gegenüber den bisher gelernten Formen liegt in der Anschaulichkeit.

Nach dem Lesen sollten Sie folgende Fragen beantworten können:

A 39 Warum benötigt man zur Darstellung eines geordneten Paares zwei Achsen?

A 40 Auf welcher Achse werden die Elemente des Definitionsbereichs dargestellt?
Auf welcher Achse werden die Elemente des Wertebereichs dargestellt?

A 41 Wann versieht man einen Platzhalter mit einem Index (z.B. x_1)?

A 42 Wie kommt man von einem geordneten Paar $(x_1|y_1)$ zum Punkt $P(x_1|y_1)$?

A 43 Welche Vorzeichen haben die beiden Koordinaten eines Punktes im IV. Quadranten?

A 44 Gegeben sei folgende Wertetabelle einer Funktion:

f:

x	2	1	-2	1,5
y	-2	1,7	4	-3

Stellen Sie diese Funktion graphisch dar.

A 45 Gegeben sei

f:

x	1	1,1	1,2	1,3
y	0	-0,1	-0,2	-0,3

Stellen Sie f graphisch dar. Schraffieren Sie die Quadranten, die man nicht zur Darstellung benötigte.
Finden Sie die angegebenen Maßstäbe für sinnvoll?

A 45a Versuchen Sie, für die Funktion aus A 45 Maßstäbe zu wählen, durch die die Punkte besser eingezeichnet werden können.

Lesen Sie nun bitte S. 19 bis S. 22.

Dieser Abschnitt wird Ihnen sicher einige Schwierigkeiten bereiten. Sie sollten dabei lernen, welche Überlegungen man anstellen muß, bevor man eine Wertetabelle graphisch darstellen kann. Noch etwas. Wenn in diesem Abschnitt der Maßstab errechnet wird, so heißt das nicht, daß diese Rechnungen unbedingt immer durchgeführt werden müssen. Sie stellen nur eine Faustregel dar zur Bestimmung von Maßstäben. Mit einiger Erfahrung schaut man sich nur noch den Definitionsbereich (x-Werte) und Wertebereich (y-Werte) an und peilt über den Daumen.

Diejenigen, die lieber durch Erfahrung lernen, können diese Seiten auch überblättern. Allerdings werden Sie dann bei späteren Aufgaben länger nachdenken müssen, welchen Maßstab sie zu wählen haben.

Folgende Probleme sollten Sie beim Lesen im Kopf haben:

A 46 Wie bestimmt man den Ausschnitt aufgrund der Vorzeichen der x- und y-Werte in der Wertetabelle?

A 47 Wie bestimmt man den Maßstab für eine Achse (x- oder y-Achse), wenn man den größten und kleinsten Wert für x oder y aus der Wertetabelle abgelesen hat?

A 48 f:

x	900	1300	1500
y	-4	-5	-5,5

Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

A 49 f:

x	0,1	0,7	0,9	1,1
y	-100	-700	-900	-1100

Zeichnen Sie den Graph der Funktion.

A 5o f: $\{(x|y) \mid y = -3x\}_{A \times N}$ für $A = \{o,2,4,6\}$

Zeichnen Sie den Graph der Funktion

A 51 Geben Sie sich selbst eine Wertetabelle vor und stellen Sie diese grapisch dar.

Lesen Sie nun bitte S. 23 bis S. 27 Mitte.

Dieser Abschnitt über analytische Funktionen und ihre Darstellung (analytische Darstellung, Wertetabelle, Graph) ist sehr wichtig, da sehr viele Wissenschaften ihre Ergebnisse in analytischer Form darstellen. Wesentlicher Grund ist: Wenn die analytische Form eines Zusammenhangs bekannt ist, so kann für beliebiges $x \in D$ der zugehörige y-Wert angegeben werden, während durch Wertetabellen stets nur Teilmengen der geordneten Paare dargestellt werden können.

Folgende Punkte sind wichtig:

A 52 Was bedeutet die Schreibweise $f: x \to y = f(x),\ x \in D$?

A 53 Welcher wesentliche Unterschied besteht zwischen der analytischen Darstellung $f: x \to y = f(x)$ und einer Wertetabelle?

A 54 Wie erhält man aus einer analytischen Darstellung den Graph der Funktion?

Sehen Sie sich nun noch das weitere Beispiel S. 27 bis S. 28 an. Dann lösen Sie folgende Probleme:

A 55 Zeichnen Sie für folgende Funktionen den Kurvenverlauf:

a) $f: x \to y = \frac{x}{1,7} + 1$ für $[-10; 10]_Q$

b) $f: x \to y = \frac{x^2}{100} + 10$ für $[0; 50]_Q$

c) $f: x \to y = \frac{4}{x}$ für $[1; 40]_N$

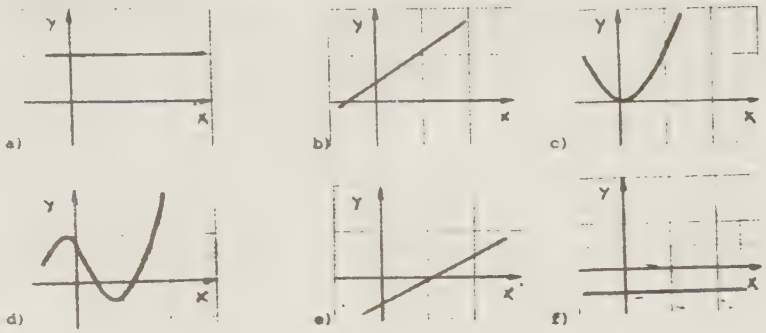
d) Überlegen Sie sich nun selbst eine analytische Funktion und stellen Sie diese dar.

Lesen Sie nun S. 28 bis S. 29. Dies ist eine Wiederholung der wichtigsten Inhalte, die Sie auch weiterhin brauchen.

Sie sollten darauf achten, daß Sie alle diese Inhalte beherrschen. Wenn nicht, lesen Sie die entsprechenden Seiten noch einmal oder fragen Sie!

Lesen Sie nun S. 30 bis S. 33 Mitte.
In den nun folgenden Kapiteln wollen wir lernen, wie man aus Wertetabellen und Graphen den analytischen Ausdruck (Funktionsgleichung) bestimmen kann. Allerdings beschränken wir uns hier auf die einfachsten Fälle.

Nehmen Sie an, Sie sollten sagen, welche Funktionsgleichungen zu folgenden Funktionen gehören:



Dann werden Sie sicher sagen, "Das weiß ich nicht". Aber aufgrund der Ähnlichkeit von a) und f) (beide Kurven sind Parallelen zur x-Achse) und b) und e) (beide sind Geraden) könnten Sie vermuten, daß diese Funktionen ähnliche Funktionsgleichungen besitzen. Das ist richtig! Allerdings wissen Sie damit noch nicht, welchen Funktionsgleichungen diese Graphen entsprechen.
Deshalb werden wir erst einmal lernen, welchen Funktionsgleichungen welche Graphen entsprechen, um dann zu wissen, welchen Graphen welche Funktionsgleichungen entsprechen.

Beim Durchlesen beachten Sie folgende Fragen:

A 56 Welche Funktionsgleichung entspricht der konstanten Funktion?

A 57 Was ist eine Kurve?

A 58 Bei welchem y-Wert schneidet die konstante Funktion die y-Achse?

A 59 Wie wird der Graph einer konstanten Funktion bezeichnet?

A 60 Wieviel Punkte braucht man, um eine konstante Funktion zu zeichnen?

A 61 Zeichnen Sie die folgenden Funktionen.
a) $f: x \to a_0$ mit $a_0 = 3{,}1$ im Bereich $[-10; 10]_{\mathbb{Q}}$
b) $f: x \to a_0$ mit $a_0 = -3$ im Bereich $[-2; 2]_{\mathbb{Q}}$
c) f ist eine Funktion, deren Funktionswerte im Bereich von $[20; 45]_{\mathbb{Q}}$ konstant 1,84 sind.
d) Geben Sie sich selbst eine konstante Funktion vor und zeichnen Sie diese für $[-10; 10]_{\mathbb{Q}}$.

Lesen Sie nun S. 33 Mitte bis S. 35 Mitte.
Nachdem Sie nun die Eigenschaften einer Funktion vom Typ $f: x \to a_0$ kennengelernt haben, sollte es Ihnen nicht schwerfallen, an Hand des Graphen einer Funktion zu erkennen, ob es sich um eine konstante Funktion handelt. Die Bestimmung von a_0 ist dann nur noch eine einfache Ableseübung.

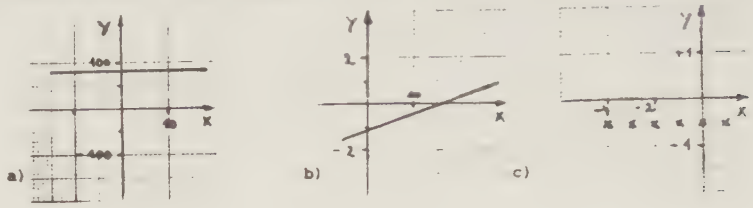
Denken Sie beim Lesen an folgende Fragen:

A 62 Über welche wesentlichen Schritte läuft die Bestimmung der Funktionsgleichung einer unbekannten Funktion.

A 63 An welcher Darstellungsform erkennt man am ehesten den Funktionstyp (Wertetabelle, Graph, Pfeildiagramm,...)?

A 64 Welchen Einfluß auf den Graphen einer konstanten Funktion hat die Veränderung des Wertes für die Formvariablen a_0?

A 65 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen folgender Funktionen soweit möglich.



A 66 Zeichnen Sie eine beliebige konstante Funktion und geben Sie deren Funktionsgleichung an.

A 66a Welche der folgenden Funktionen ist keine konstante Funktion?

a) Je größer x desto größer y
b) Funktionswerte y sind für alle x gleich
c) Je kleiner x desto größer y
d) $f: x \to \frac{3}{x}$
e) $f: x \to 3 + 4$
f) $f: x \to 3 + x^2$

Die konstante Funktion war die einfachste analytische Funktion. Nun werden Sie die lineare Funktion vom Typ $f: x \to a_1 \cdot x$ kennen und erkennen lernen.
Lesen Sie bitte S. 35 bis S. 37 Mitte.

Fragen:

A 67 Was bedeutet "y ist proportional zu x"

A 68 Stimmt folgende Aussage für lineare Funktionen:
"Wenn sich der Wert für x verdoppelt, dann verdoppelt sich der y-Wert."

A 69 Erklären Sie, warum bei linearen Funktionen gilt:
"Unabhängig von a_1 ist stets $y = 0$ für $x = 0$ (Ursprungsgerade)."

A 70 Wie groß ist der Funktionswert y einer linearen Funktion für $x = 1$?

A 71 Welchen Einfluß auf den Graph hat das Vorzeichen von a_1?

A 72 Zeichnen Sie folgende Funktionen

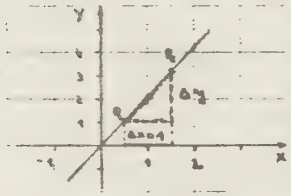
a) $f: x \to +2{,}1 \cdot x$ für $[-2; +2]_Q$

b) $f: x \to -0{,}17 \cdot x$ für $[-20; 20]_Q$

c) Es sei eine lineare Funktion ($f: x \to a_1 x$) gegeben, deren Funktionswerte y stets doppelt so groß sind wie die zugehörigen x-Werte. Zeichnen Sie die Funktion im Bereich $[-5; 5]_Q$.

d) Überlegen Sie sich nun selbst eine Funktionsgleichung vom Typ $f: x \to a_1 x$ und zeichnen Sie diese.

A 73



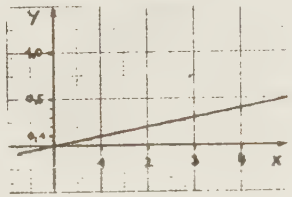
Betrachten Sie noch einmal den von Ihnen gezeichneten Graph A 72 a).
Sie sollen nun für A 72a) die Höhendifferenz Δy zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 bestimmen, wenn diese Punkte in x-Richtung um eine Einheit entfernt sind. Zeichnen Sie hierzu an einer beliebigen Stelle der Geraden einen Punkt P_1 ein, gehen Sie eine Einheit nach rechts und lesen Sie die Höhendifferenz Δy ab.

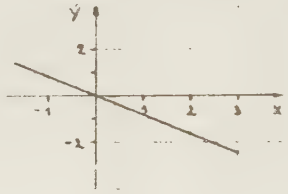
Sie werden dann etwas Überraschendes feststellen. Egal, welchen Punkt man für P_1 gewählt hat, immer erhält man für $\Delta x = 1$ dengleichen Wert für Δy. Vergleichen Sie den erhaltenen Wert Δy mit a_1 aus der Funktionsgleichung von A 72a).
Was stellen Sie fest?

Wenn Sie A 73 lösen konnten, dann haben Sie sich vielleicht gewundert, warum für zwei beliebige Punkte P_1 und P_2, die um $\Delta x = 1$ voneinander entfernt sind, stets eine Höhendifferenz Δy vorhanden ist, die gleich der Formvariablen a_1 der entsprechenden Funktionsgleichung ist. Es ist allerdings kein Wunder, sondern eine allgemeingültige Eigenschaft linearer Funktionen.

Lesen Sie nun den entsprechenden Beweis nach (S. 37 unten bis S. 38). Überprüfen Sie die Formel an folgenden zwei linearen Funktionen. Nehmen Sie sich hierzu zwei beliebige Punkte P_1 und P_2 der Funktion und berechnen Sie a_1.

A 74 a) $f: x \to 0{,}1 \cdot x$ b) $f: x \to -0{,}8x$





Nun haben Sie eigentlich schon gelernt, wie man die Formvariable a_1 einer als Graph oder Wertetabelle gegebenen Funktion berechnen kann, falls es sich um eine lineare Funktion handelt.

Auf den Seiten 38 bis 41 ist dies Verfahren noch einmal ausführlich erklärt.

A 75 Über welche vier Stufen verläuft die Bestimmung einer analytischen Funktion aus einem Graphen, falls es sich um eine lineare Funktion handelt.

A 76 Wie kann man feststellen, ob die berechnete Funktionsgleichung die als Wertetabelle oder Graph gegebene Funktion auch richtig beschreibt.

A 77 Warum erfüllen die Koordinaten einer als Wertetabelle oder Graph gegebenen Funktion nicht immer die berechnete Funktionsgleichung exakt?

A 78 Bestimmen Sie die analytischen Ausdrücke (soweit möglich) von folgenden Funktionen.

a)

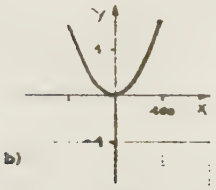
x	1	2	4	5
y	0,11	0,22	0,44	0,55

b)

x	0	10	20	30
y	0	100	400	900

A 79

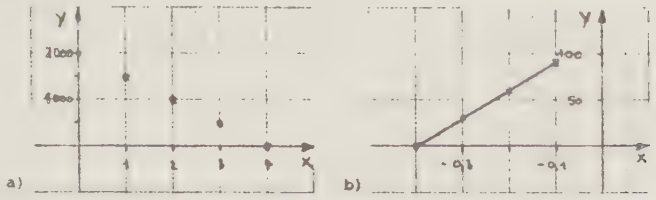
a)



b)

c)

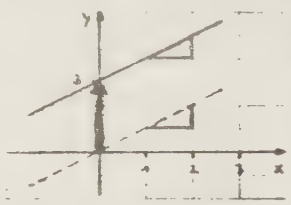
A 80 **Bestimmen Sie die Formvariable a_1 (Steigung) folgender Funktionen**



A 81 Gegeben sei eine <u>lineare</u> Funktion, die durch die Punkte $P_1(1{,}5 \mid -0{,}6)$ und $P_2(3 \mid -1{,}2)$ geht. Bestimmen Sie den analytischen Ausdruck.

A 82 Zeichnen Sie irgendeine lineare Funktion und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung.

Wir haben uns bisher mit relativ <u>speziellen</u> Geraden beschäftigt, die entweder Parallelen zur x-Achse (konstante Funktion $f: x \to a_0$) oder Ursprungsgeraden (lineare Funktion $f: x \to a_1 x$) darstellten.
Wesentlich häufiger wird man aber dem Fall begegnen, daß die Gerade weder parallel zur x-Achse noch durch den Ursprung verläuft. Was dann?



Dann wissen wir immerhin schon, daß die Steigung genau so groß ist wie die Steigung derjenigen Geraden, die parallel zu ihr durch den Ursprung verläuft.
Man könnte nun einfach folgern:
Auch Geraden, die nicht durch den Ursprung verlaufen, sind lineare Funktionen mit $y = a_1 \cdot x$. Da ist nur ein Haken. Für $x = 0$ wäre der zugehörige y-Wert auch Null. Und das soll ja nun nicht mehr vorausgesetzt werden. Im obigen Beispiel ist $y(\text{für } x = 0) = 3$; also muß man Funktionsgleichung $y = a_1 \cdot x$ so verändern, daß für $x = 0$ der Funktionswert $y = 3$ ist. Nichts einfacher als das:
$y = a_1 x + 3$ liefert für $x = 0$ den Funktionswert $y = 3$.
Bei einer allgemeinen Geraden müssen wir also noch einen Summanden a_0 (im obigen Beispiel $a_0 = 3$) auf der rechten Seite der Funktionsgleichung für lineare Funktionen zulassen.
Die Funktionsgleichung solcher Geraden, allgemeine lineare Funktionen genannt, lautet dann $y = a_1 x + a_0$.

Lesen Sie nun bitte S. 41 bis S. 43 Mitte.

Fragen:

A 83 Worin unterscheidet sich die allgemeine lineare Funktion von einer linearen Funktion (Ursprungsgeraden)?

A 84 Welche Funktionstypen erhält man als Spezialfall einer allgemeinen linearen Funktion

a) für $a_0 = 0$ und b) für $a_1 = 0$?

A 85 Welche zwei Punkte einer allgemeinen linearen Funktion sind stets leicht zu berechnen?

A 86 Zeichnen Sie die Funktion
a) $f: x \to x-2$ für $[-2;2]_Q$ b) $f: x \to 4-\frac{x}{6}$ für $[0;20]_Q$

Wie groß ist der Funktionswert für $x = 0$?

c) Zeichnen Sie die allgemeine lineare Funktion, die die y-Achse im Punkt $P(0 \mid 4500)$ schneidet und eine Steigung von -500 besitzt im Bereich $[0;5]_Q$

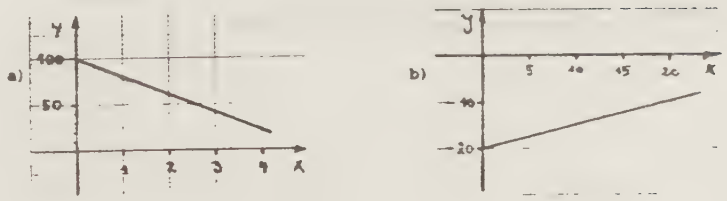
d) Geben Sie sich nun selbst eine allgemeine lineare Funktion vor und zeichnen Sie diese im Bereich $[0;20]_Q$

Wir kommen nun zum Schluß des Lehrtextes. Wir haben zuletzt die allgemein lineare Funktion kennengelernt und wollen auch diesmal wieder die Bestimmung der Funktionsgleichung üben. Betrachten wir noch einmal die allgemeine Funktionsgleichung dieses Typs:

$$y = a_1 x + a_0,$$

so sieht man, daß wir diesmal zwei Unbekannte bestimmen müssen; nämlich die Formvariablen a_1 <u>und</u> a_0.
Ein einfaches Verfahren zur Berechnung der Größen a_1 und a_0 geht über die Punkte $P(0 \mid a_0)$ und $P(1 \mid a_1+a_0)$, deren y-Koordinaten in sehr einfacher Beziehung zu a_0 und a_1 stehen.
Lesen Sie nun bitte S. 43 bis S. 44.

A 87 **Bestimmen Sie für folgende Graphen die Funktionsgleichung**



Sehr häufig ist das einfache Verfahren nicht anwendbar, da die Koordinaten der Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1|a_0+a_1)$ nicht angebbar sind.
Dann aber muß man zuerst a_1 (wie bei linearen Funktionen) mit Hilfe der Steigungsformel $a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ berechnen. Hat man a_1 bestimmt, so ist nur noch a_0 unbekannt.

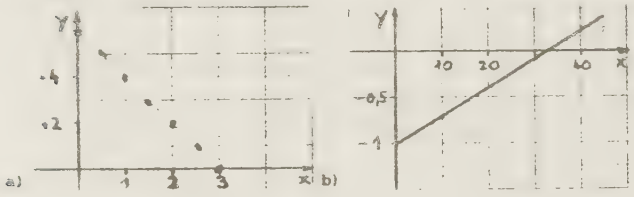
a_0 erhält man durch folgende Überlegung:
Wenn die gesuchte Funktionsgleichung die gegebene Funktion richtig beschreibt, so muß die y-Koordinate eines Punktes der Geraden durch die gesuchte Funktionsgleichung bestimmbar sein.
Wir setzen deshalb die Koordinaten eines Punktes der Geraden und den berechneten Wert für a_1 in die allgemeine Funktionsgleichung $y = a_1x + a_0$ ein.

In dieser Gleichung ist nur noch a_0 unbekannt und wir können es berechnen.

Lesen Sie nun S. 45 bis S. 46, wo dieses Verfahren ausführlich dargestellt ist.

A 88 Geben Sie stichwortartig den Weg an, wie man für allgemeine lineare Funktionen aus Wertetabellen oder Graphen a_0 und a_1 immer bestimmen kann.

A 89 **Bestimmen Sie für folgende Funktionen den analytischen Ausdruck.**



c) **Eine allgemeine lineare Funktion geht durch die Punkte $P_1(1|9)$ und $P_2(0|12)$. Wie lautet die Funktionsgleichung?**

d) **Zeichnen Sie selbst eine allgemeine lineare Funktion und bestimmen Sie deren Funktionsgleichung nach obigem Verfahren.**

ANTWORTBOGEN 1P Name: Datum: Klasse:

Fragen zur S. 1 - 5

A 1: Wenn die Begriffe, die in der Aussage vorkommen, klar definiert sind.

A 2: Weil sonst ein Vergleich zwischen den verschiedenen Autobahnabschnitten Aussagen liefert, die sich nicht nur auf den Einfluß der ZHG beziehen.

A 3: Zwei Mengen sind gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind. Die Reihenfolge der Elemente ist ohne Bedeutung.

Fragen zu S. 5 - 8

A 4: Bei der aufzählenden Schreibweise werden die Elemente der Menge aufgezählt. Dagegen wird bei der beschreibenden Darstellung die gemeinsame Eigenschaft aller Elemente angegeben.

A 5: Die Grundmenge G ist die Menge aller Elemente, aus der die Elemente einer bestimmten Menge M ausgesondert werden.

A 6: Die Menge I enthält alle Elemente T der Grundmenge $G = \mathbb{Q}$, die die Bedingung "T ist Vielfaches von o,7 " erfüllen .

A 7: $A = \{\ldots, -3, -2, -1, o, 1, 2\}$

A 8: $C = \{c \mid c \text{ ist Vielfaches von } 4\}_{G=\mathbb{N}}$

A 9: $D = \{\ldots; -o{,}46 ; -o{,}23 ; o ; o{,}23 ; o{,}46 ; \ldots\}$

A1o: $M = \{a \mid a \text{ ist Vielfaches von } o{,}17\}_{G=\mathbb{Q}}$

A11: $B = \{12{,}5cm; 25cm; 37{,}5cm; 5ocm; 62{,}5cm; \ldots\}$

A12: Eigenschaft: "Die Summe der Augen ist stets 4 "

A13: $A = \{6, 12, 18, 24, \ldots\}$

A14: $A = \{a \mid a \text{ ist Vielfaches von } 6\}_{G=\mathbb{N}}$

Dies wären zum Beispiel Möglichkeiten, A13 und A 14 zu beantworten.

1PC

Fragen zu S. 8 - 11

A15: Geordnet bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Elemente eines Paares ankommt.

A16: Zwei geordnete Paare (a|b) und (u|v) sind gleich, wenn a=u und b=v ist.

A17: Eine Paarmenge P bezüglich zweier Mengen A und B ist eine Menge von geordneten Paaren aus A und B.

A17: Die Grundmenge einer Paarmenge ist die Produktmenge AxB .

A17: Die Produktmenge AxB enthält alle geordneten Paare aus A und B, während die Paarmenge nur eine Teilmenge von AxB darstellt.

A18: zum Beispiel $P = \{(E_1 \mid 1ookm/h), (E9 \mid 1ookm/h), (E5 \mid 12okm/h)\}$

A19: zum Beispiel $P = \{(1{,}9 \mid 1{,}9), (1{,}9 \mid 2{,}3), (1{,}9 \mid 17), (2{,}3 \mid 2{,}3), (2{,}3 \mid 17)\}$

A2o: zum Beispiel $P = \{(1 \mid \frac{1}{1}), (1 \mid \frac{1}{2o}), (\frac{1}{4} \mid \frac{1}{4o})\}$

A21: Hier kann man nicht erraten, auf welche Paarmenge Sie gekommen sind.

A22: keine geordneten Paare sind: 2,3 (in BRD nicht hergestellte Produkte) 4 (falsche Reihenfolge der Elemente) und 6 (kein landwirtschaftliches Produkt).

ANTWORTBOGEN 2P Name: Datum: Klasse:

Fragen zu S. 12 - 14

A23: Durch eine Zuordnungsvorschrift wird der Zusammenhang zwischen den Elementen der geordneten Paare der Relation beschrieben.

Fragen zu S. 14 - 18

A24: aufzählende Darstellungen für Relationen: aufzählende Paarmengenschreibweise, Wertetabelle und Pfeildiagramm.

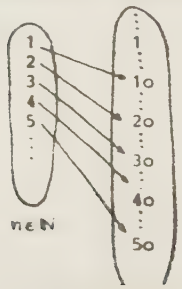
A25: Im Pfeildiagramm werden alle Elemente von A und B dargestellt. Man erkennt dadurch sofort, welche Elemente von A und B nicht Elemente geordneter Paare darstellen.

A25: Nur beschreibende Darstellungen sind in der Lage, auch solche Relationen eindeutig festzulegen, die in aufzählender Form nicht mehr vollständig wiedergebbar sind .

A26: Die Paarmenge P besteht aus allen geordneten Paaren (a|b) aus der Grundmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, für die gilt : $b = 0{,}1 \cdot a$.

A27: zum Beispiel:

Sch.z. n	1	2	3	4	5	...
b L/min	10	20	30	40	50	...



A28: zum Beispiel : K:

a in km	1	20	30	40	90
b in L	0,12	2,4	3,6	4,8	10,8

A29: zum Beispiel : R:

Kredit a_{DM}	100	1000	10000	20000	30000
Zinsen b_{DM}	13	130	1300	2600	3900

A30: Ihre Antwort kenne ich nicht. Man kann dann aber auch keine richtige Lösung angeben

A31: $W = \{(n|k) \mid n = 6 \cdot k\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

A32: $Z = \{(k_{Zw} | t_{DM}) \mid t_{DM} = \frac{10}{k_{Zw}}\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$

Fragen zu S. 20 - 23

A33: Bei einer Funktion muß jedem Element der ersten Menge genau ein Element der zweiten Menge zugeordnet werden können. Diese Bedingung müssen Relationen nicht erfüllen.

A34: Eine Relation ist keine Funktion, wenn in der Wertetabelle oder im Pfeildiagramm einem Element der ersten Menge kein oder mehr als ein Element der zweiten Menge zugeordnet ist.

A35: "Argumentmenge/Definitionsbereich" bezieht sich auf die erste Menge. "Wertebereich/Bildmenge" bezieht sich auf die Elemente der zweiten Menge.

A36: Eine reelle Funktion ist eine Abbildung von einer Zahlmenge A auf eine zweite Zahlmenge B.

A37: Folgende Beispiel stellten keine Funktion dar:

a) dem Element r=1 werden mehr als ein Element s zugeordnet

c) dem Element a=1 " "

e) den Elementen $u > 5$ kann kein Element $v \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden.

A38: a) $D = \{1,2,3\}$ b) $D = \{2,4,6,8,\ldots\}$ c) D enthält kein Element

ANTWORTBOGEN 3P Name: Klasse: Datum:

Fragen zu S. 24 - 26

A39: Man benötigt zwei Achsen, da die Elemente zweier Zahlmengen A und B unabhängig voneinander dargestellt werden müssen.

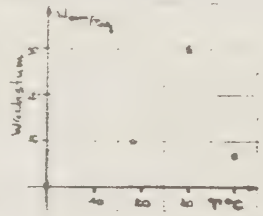
A4o: Die Elemente des Definitionsbereichs D werden auf der waagrechten Achse (Abszissen-Achse, x-Achse genannt), die Elemente des Wertebereichs W auf der senkrechten Achse (Ordinaten-Achse, y-Achse genannt) dargestellt.

A41: Ein Platzhalter wird mit einem Index versehen, wenn man ein bestimmtes, zahlenmäßig aber nicht angegebenes Element darstellen will (also Platzhalter für ein einziges Element).

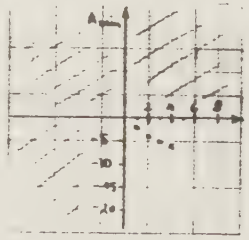
A42: Suche Punkt $P(x_1)$ und $P(y_1)$ auf den entsprechenden Achsen. Parallelen einzeichnen zu den beiden Achsen durch $P(x_1)$ und $P(y_1)$. Der Schnittpunkt der Parallelen ergibt den Punkt $P(x_1\ y_1)$.

A43: Im IV. Quadranten haben alle Punkte positive x-Koordinaten und negative y-Koordinaten.

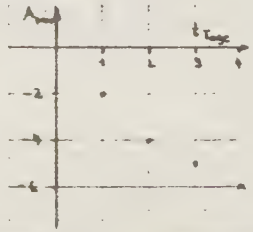
A44:



A45:



A45:



f3P

Fragen zu S. 27 -3o

A46: Da man weiß, welche Quadranten welchen Vorzeichen von x- und y- Koordinaten entsprechen, kann man den Ausschnitt wie folgt bestimmen:

Vorzeichen x	Vorzeichen y	Ausschnitt
+	+	I. Quadrant
+	-	IV. Quadrant
+, -	+	I u. II. Quadrant
+	+, -	I u. IV. Quadrant
u.s.w.	u.s.w.	u.s.w.

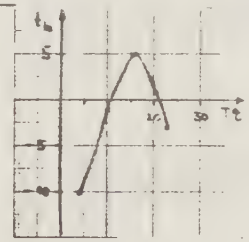
A47: Man bildet die Differenz aus dem größten und kleinsten x-Wert oder y-Wert ($x_{max} - x_{min}$ oder $y_{max} - y_{min}$) und teilt diesen Wert durch die Länge l_{cm} der entsprechenden Achse:

Maßstab: $\frac{(x_{max} - x_{min})}{l_{cm}}$

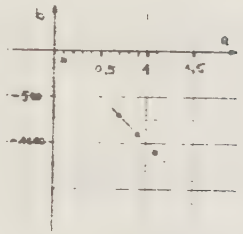
Als Ergebnis erhält man die Zahl der Einheiten, die 1 cm entsprechen.

Ist dieser berechnete Maßstab unpraktisch, so sucht man nach den angegebenen Regeln den entsprechenden praktischen Maßstab.

A48:

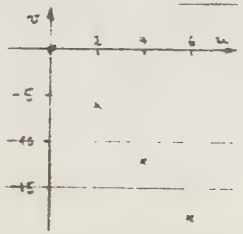


A49:



A5o:

u	0	2	4	6
v	0	-6	-12	-18



ANTWORTBOGEN 4P Name: Klasse: Datum:

A51

Gewicht g_{kg}	
Länge l_m	

Fragen zu S. 31 - 35

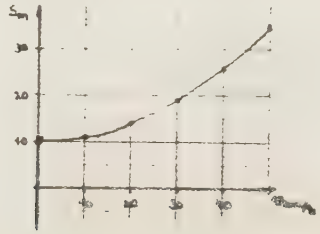
A52: Die Schreibweise f: $x \rightarrow y = f(x)$, $x \in D$ bedeutet:
"Die Funktion f ordnet jedem Element x des Definitionsbereichs D einen Funktionswert y zu, der durch die Zuordnungsvorschrift f( ) bestimmt ist.

A53: Eine Wertetabelle stellt stets nur eine Teilmenge einer Funktion aufzählend dar. Die analytische Darstellung dagegen beschreibt die Zuordnung so, daß man für jedes Element von D den zugehörigen Funktionswert angeben kann.

A54: Man erhält aus einer analytischen Darstellung den entsprechenden Graph der Funktion, indem man für bestimmte x-Werte die zugehörigen Funktionswerte berechnet (Wertetabelle) und diese graphisch darstellt.

A55 a)

v km/h	0	10	20	30	40	50
s m	10	11	14	13	26	35



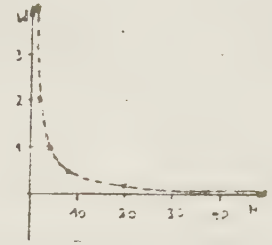
f4p

A55 b)

a	0	1,7	-4,7	8,5	-8,5
b	1	0	2	-4	+6

A55 c)

N	1	2	4	8	20	50
W	4	2	1	½	0,2	0,08



A55 d) Meine Funktion lautet: .....

Fragen zu S. 37 - 42

A56 : $y = a_0$, $a_0 \in \mathbb{Q}$

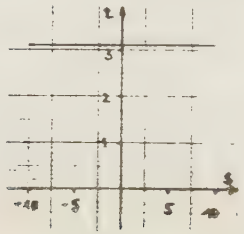
A57 : Eine Kurve ist eine dichte Folge von Punkten (auch geschlossene Linie genannt).

A58 : Die konstante Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $P(0|a_0)$

A59 : Parallele zur x-Achse

A60 : Zum Zeichnen einer konstanten Funktion benötigt man nur zwei Punkte, da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist.

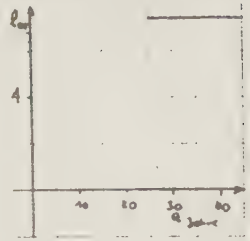
A61: a)

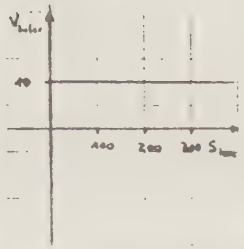


b)

Antwortbogen 5P Name: Klasse: Datum:

A61 c)





Zum Beispiel:

Zusammenhang zwischen mittlerem Benzinverbrauch V_{Liter} pro 100 km und gefahrenen Autobahnkilometern S_{km} (VW 1300).

A62 d)

Fragen zu S.43-46

A62: Erkennen des f - Typs Bestimmung der Formvariablen
Einsetzen der Formvariablen in die allg. Funktionsgleichung des jeweils vorliegenden Typs.

A63: Am ehesten erkennt man den f - Typ am Graphen.

A64: Eine Änderung der Formvariable führt zu einer Verschiebung des Graphen parallel zur Abszisse (x-Achse).

A65: a) $p_{DM} = 80$

b) f - Typ unbekannt

c) $b = -0,5$

A66: Meine f - Gleichung lautet:

.....

5pf

A66a Keine konstante Funktion: a); c); d); f)

Fragen zu S. 46 - 48

A 67 "y proprotional zu x" bedeutet: Der Funktionswert y ist stets ein Vielfaches des x-Wertes

A68 Diese Aussage ist richtig, da für lineare Funktionen gilt: $y = a_1 x$

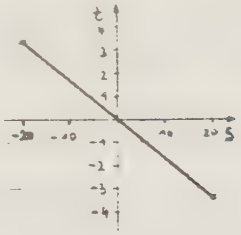
A69 Die f-Gleichung für lineare Funktionen lautet $y = a_1 \cdot x$
Ist $x = 0$, so folgt daraus stets $a_1 \cdot 0 = 0$. Deshalb ist der Funktionswert y stets Null, für $x = 0$

A7o Für $x = 1$ ist $y = a_1 \cdot 1 = a_1$

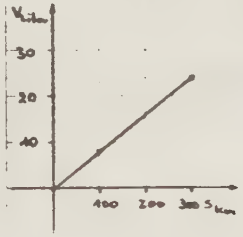
A71 Ist a_1 positiv, so verläuft die Gerade im I. und III. Quadranten.
Ist a_1 negativ, so verläuft die Gerade im II. und IV. Quadranten.

A72 a)

b)



c)



d)

Funktionsgleichung:

Antwortbogen 6P Name: Klasse: Datum:

A73 Die Höhendifferenz Δy zweier Punkte, die in x-Richtung um $\Delta x = 1$ entfernt sind, ist für lineare Funktionen immer gleich der Formvariablen a_1 (also $\Delta y = a_1$ für $\Delta x = 1$)

Fragen zu S. 48 - 49

A74 a) $a_1 = 0{,}1$

b) $a_1 = -0{,}8$

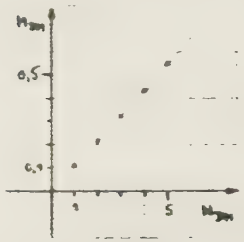
Fragen zu S.49 - 53

A75 Erkennung f - Typ ; Bestimmung von a_1 ; Einsetzen von a_1 in die allgemeine f-Gleichung für lineare Funktionen ; Probe.

A76 Indem man die Koordinaten eines Punktes des vorliegenden Graphen oder Wertetabelle in die berechnete f-Gleichung einsetzt.

A77 Bei der Berechnung der Formvariablen a_1 aus Wertetabellen rundet man meistens auf. Bestimmt man a_1 aus Graphen, so muß man stets Ablesefehler berücksichtigen. Deshalb muß man damit rechnen, daß die Koordinaten eines Punktes der Funktion die berechnete f- Gleichung nicht exakt erfüllen.

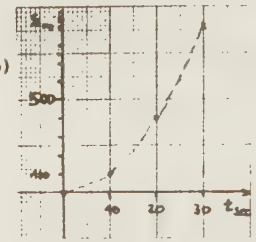
A78 a)



Funktionsgleichung lautet : $M_{DM} = 0{,}11 \cdot N_{DM}$

6 Pf

A78 b)



Funktionsgleichung lautet : f - Typ unbekannt

A79 a) Funktionsgleichung lautet: $W_{DM} = 500$

b) Funktionsgleichung lautet: f - Typ unbekannt

c) Funktionsgleichung lautet: $T_{°C} = -0{,}01 \cdot t_{sec}$

A80 a) $a_1 = \frac{3000 - 4000}{2 - 1} = -1000$ DM pro Jahr

b) $a_1 = \frac{90 - 0}{-0{,}1-(-0{,}4} = \frac{90}{0{,}3} = 300$

A81 Die Funktionsgleichung lautet :

$y = -0{,}4 \cdot x$

Rechenweg: 1) $a_1 = \frac{1{,}2 - (-0{,}6)}{3 - 1{,}5} = \frac{-0{,}6}{1{,}5}$

$= -0{,}4$

2) Einsetzen: $y = -0{,}4 \cdot x$

A82

Die Funktionsgleichung lautet :

.....

Bitte beantworten Sie folgende Frage :
Welches Interesse haben Sie am Lehrerunterricht?

1 2 3 4 5 6 7
neutral große Ablehnung

Welches Interesse haben Sie am Unterricht nach Lehrtexten?

1 2 3 4 5 6 7
neutral große Ablehnung

Antwortbogen 7P Name: Klasse: Datum:

Fragen zu S.54 - 56

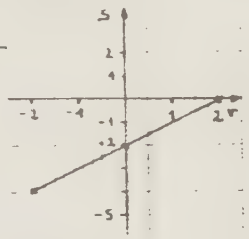
A83 Der Graph der <u>allgemeinen</u> linearen Funktion verläuft nicht durch den Ursprung (0 | 0) des Koordinatensystems.

A84 a) Für $a_0 = 0$ erhält man eine <u>lineare</u> Funktion

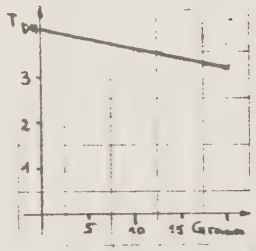
b) Für $a_1 = 0$ erhält man eine <u>konstante</u> Funktion

A85 Die Punkte $P(0|a_0)$ und $P(1 | a_1+a_0)$ sind stets leicht zu berechnen.

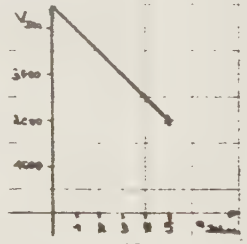
A86 a)



b)



c)



d)

Meine Funktionsgleichung lautet:

Fragen zu S. 56 - 58

7Pf

A87 a) Die Funktionsgleichung lautet : $P_{\%} = 100 - 20 \cdot t_h$

<u>Rechenweg</u>: Die 2 Punkte $P(0|a_0) = P(0 | 100)$
und $P(1|a_0+a_1) = P(1/80)$
bestimmen. Man erhält sofort

$\underline{a_0 = 100}$ und $a_0 + a_1 = 80$

Einsetzen von $a_0 \Rightarrow 100 + a_1 = 80$ $a_1 = 80 - 100$
$\underline{a_1 = -20}$

b) Die Funktionsgleichung lautet : $T_{°C} = -5 + 0{,}5 \cdot t_{min}$

Bemerkung: Die Bestimmung des Funktionswertes $T_{°C}$ für $t_{min} = 1$ konnte nur sehr ungenau erfolgen.

Fragen zu S. 59 - 60

A88 1) Bestimmung der Koordinaten zweier Punkte
2) Berechnung von a_1
3) Einsetzen von a_1 in $y = a_1 x + a_0$
4) Einsetzen der Koordinaten eines Punktes in 3) und Bestimmung von a_0.

A89 a) Die Funktionsgleichung lautet: $z = -2r + 6$

b) Die Funktionsgleichung lautet: $h_m = \frac{1}{33} \cdot t_{sec} - 1$

c) Die Funktionsgleichung lautet: $h_m = -3\ t_{Std.} + 12$

d) Meine Funktionsgleichung lautet:

.....

ANTWORTBOGEN 1M Name: Datum: Klasse:

Fragen zu S. 1 - 5

A 3: Zwei Mengen sind gleich, wenn alle ihre Elemente gleich sind. Die Reihenfolge der Elemente ist ohne Bedeutung.

A 4: Bei der aufzähleneden Schreibweise werden die Elemente der Menge aufgezählt. Dagegen wird bei der beschreibenden Darstellung die gemeinsame Eigenschaft aller Elemente angegeben.

A 5: Die Grundmenge G ist die Menge aller Elemente, aus der die Elemente einer bestimmten Menge M ausgesondert werden.

A 6: Die Menge M enthält alle Elemente x der Grundmenge G= $\mathbb{Q}$, die die Bedingung "x ist Vielfaches von o,7 " erfüllen.

A 7: $M = \{\cdots, -3, -2, -1, o, 1, 2\}$

A 8: $M = \{x \mid x \text{ ist Vielfaches von } 4\}_{G=\mathbb{N}}$

A 9: $M = \{\cdots; -o,46 ; -o,23 ; o ; o,23 ; o,46 ; \cdots\}$

A1o: $M = \{x \mid x \text{ ist Vielfaches von } o,17\}_{G=\mathbb{Q}}$

A11: $M = \{5, 1o, 15, 2o, \cdots\}$

A12: $M = \{x \mid x \text{ sind zweistellige Zahlen, deren Quersumme 4 ist}\}_{G=\mathbb{N}}$

A13: zum Beispiel : $M = \{6, 12, 18, 24, \cdots\}$

A14: zum Beispiel: $M = \{x \mid x \text{ ist Vielfaches von } 6\}_{G=\mathbb{N}}$

Fragen zu S. 5 - 7

A15: Geordnet bedeutet, daß es auf die Reihenfolge der Elemente eines Paares ankommt.

A16: Zwei geordnete Paare (a|b) und (u|v) sind gleich, wenn a = u und b = v ist.

A17: Eine Paarmenge P bezüglich zweier Mengen A und B ist eine Menge von geordneten Paaren aus A und B.

A17: Die Grundmenge einer Paarmenge ist die Produktmenge A×B.

A17: Die Produktmenge A×B enthält alle geordneten Paare aus A und B, während die Paarmenge nur eine Teilmenge von A×B darstellt.

A18: zum Beispiel: $P = \{(1|a), (1|b), (1|c)\}$

A19: zum Beispiel: $P = \{(1,9|1,9), (1,9|2,3), (1,9|17), (2,3|2,3), (2,3|17)\}$

A2o: zum Beispiel: $P = \{(1|3), (3|9), (4|12)\}$

A21: Hier kann man keine Lösung angeben, da man nicht weiß, auf welche Paarmenge Sie gekommen sind.

A22: Keine geordneten Paare sind: 2, 4, 5, 7

ANTWORTBOGEN "2M Name: Datum: Klasse:

Fragen zu S. 7 - 11

A23: Durch eine Zuordnungsvorschrift wird der Zusammenhang zwischen den Elementen der geordneten Paare der Relation beschrieben.

A24: aufzählende Darstellungen für Relationen: aufzählende Paarmengenschreibweise, Wertetabelle, Pfeildiagramm.

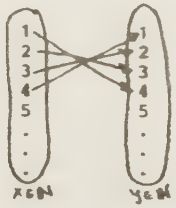
A25: Im Pfeildiagramm werden alle Elemente von A und B dargestellt. Man erkennt dadurch sofort, welche Elemente von A und B nicht Elemente geordneter Paare darstellen.

A25: Nur beschreibende Darstellungen sind in der Lage, auch solche Relationen eindeutig festzulegen, die in aufzählender Form nicht mehr vollständig wiedergebbar sind.

A26: Die Paarmenge P besteht aus allen geordneten Paaren $(x|y)$ aus der Grundmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, für die gilt: $y = 0{,}1 \cdot x$.

A27: R:

x	1	2	3	4
y	4	3	2	1



A28: R:

x	1	20	30	50
y	0,12	2,4	3,6	6,0

Dies ist eine mögliche Werte-Tabelle von R. Ihre Wertetabelle kann andere Elemente x enthalten.

A29: R:

x	100	200	300	400	500
y	13	26	39	52	65

Hier gilt dasgleiche wie für A28 .

A30: Ihre Antwort kenne ich nicht. Ich kann deshalb auch keine richtige Lösung angeben.

A31: $P: \{(x|y) \mid x = 6 \cdot y\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$

A32: $P: \{(x|y) \mid y = \frac{10}{x}\}_{\mathbb{N} \times \mathbb{Q}}$

Fragen zu S. 13 - 15

A33: Bei einer Funktion muß jedem Element x der ersten Menge genau ein Element y der zweiten Menge zugeordnet werden können. Diese Bedingung müssen Relationen nicht erfüllen.

A34: Eine Relation ist keine Funktion, wenn in der Wertetabelle oder im Pfeildiagramm einem Element der ersten Menge kein oder mehr als ein Element der zweiten Menge zugeordnet ist.

A35: "Argumentmenge/Definitonsbereich" bezieht sich auf die Elemente x der ersten Menge. "Wertebereich/Bildmenge" bezieht sich auf die Elemente y der zweiten Menge.

A36: Eine reelle Funktion ist eine Abbildung von einer Zahlmenge A auf eine zweite Zahlmenge B.

A37: Folgende Beispiele stellten keine Funktionen dar:

a) dem Element x=1 werden mehr als ein Element y zugeordnet
c) dem Element x=1 " "
e) den Elementen x>5 kann kein Element $y \in \mathbb{N}$ zugeordnet werden.

A38: a) $D = \{1,2,3\}$ b) $D = \{2,4,6,8,\ldots\}$ c) D enthält kein Element

ANTWORTBOGEN 3M Name: Klasse: Datum:

Fragen zu S. 16 - 19

A39: Man benötigt zwei Achsen, da die Elemente zweier Zahlmengen A und B unabhängig voneinander dargestellt werden müssen.

A4o: Die Elemente des Definitionsbereichs D werden auf der waagrechten Achse (Abszissen-Achse, x-Achse genannt), die Elemente des Wertebereichs W auf der senkrechten Achse (Ordinaten-Achse, y-Achse genannt) dargestellt.

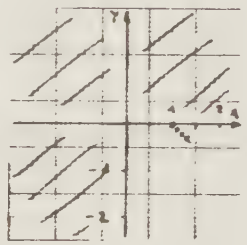
A41: Ein Platzhalter wird mit einem Index versehen, wenn man ein bestimmtes, zahlenmäßig aber nicht angegebenes Element darstellen will (also Platzhalter für ein einziges Element).

A42: Suche Punkt $P(x_1)$ und $P(y_1)$ auf den entsprechenden Achsen. Parallelen einzeichnen zu den beiden Achsen durch $P(x_1)$ und $P(y_1)$. Der Schnittpunkt der Parallelen ergibt den Punkt $P(x_1|y_1)$.

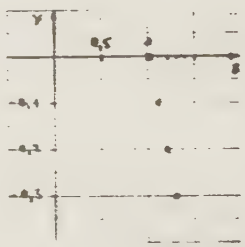
A43: Im IV. Quadranten haben alle Punkte positive x-Koordinaten und negative y-Koordinaten.

A44:

A45:



A45a:



f3M

Fragen zu S. 19 - 22

A46: Da man weiß, welche Quadranten welchen Vorzeichen von x- und y- Koordinaten entsprechen, kann man den Ausschnitt wie folgt bestimmen:

Vorzeichen x	Vorzeichen y	Ausschnitt
+	+	I. Quadrant
+	-	IV. Quadrant
+, -	+	I u. II. Quadrant
+	+, -	I u. IV. Quadrant
u.s.w.	u.s.w.	u.s.w.

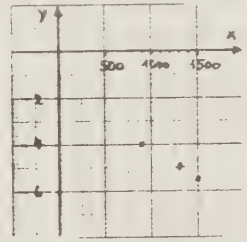
A47: Man bildet die Differenz aus dem größten und kleinsten x-Wert oder y-Wert ($x_{max} - x_{min}$ oder $y_{max} - y_{min}$) und teilt diesen Wert durch die Länge l_{cm} der entsprechenden Achse:

Maßstab: $\frac{(x_{max} - x_{min})}{l_{cm}}$

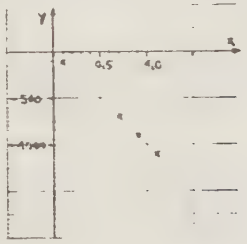
Als Ergebnis erhält man die Zahl der Einheiten, die 1 cm entsprechen.

Ist dieser berechnete Maßstab unpraktisch, so sucht man nach den angegebenen Regeln den entsprechenden praktischen Maßstab.

A48:

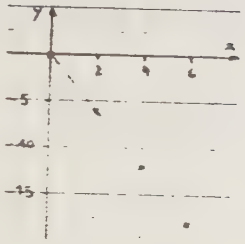


A49:



A5o:

x	0	2	4	6
y	0	-6	-12	-18



ANTWORTBOGEN 4M Name: Klasse: Datum:

A51: x / y

Fragen zu S.23 - 27

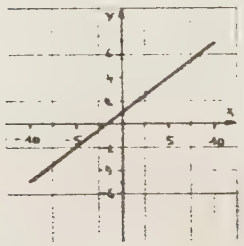
A52: Die Schreibweise f: $x \mapsto y = f(x)$, $x \in D$ bedeutet:
"Die Funktion f ordnet jedem Element x des Definitionsbereichs D einen Funktionswert y zu, der durch die Zuordnungsvorschrift f( ) bestimmt ist.

A53: Eine Wertetabelle stellt stets nur eine Teilmenge einer Funktion aufzählend dar. Die analytische Darstellung dagegen beschreibt die Zuordnung so, daß man für jedes Element von D den zugehörigen Funktionswert angeben kann.

A54: Man erhält aus einer analytischen Darstellung den entsprechenden Graph der Funktion, indem man für bestimmte x-Werte die zugehörigen Funktionswerte berechnet (Wertetabelle) und diese graphisch darstellt.

A55 a)

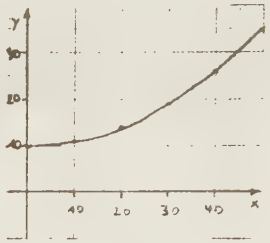
x	0	1,3	-1,3	8,5	-8,5
y	1	2	0	6	-4



f4m

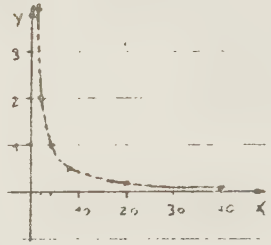
A55 b)

x	0	10	20	30	40	50
y	10	11	14	19	26	35



A55 c)

x	1	2	4	8	20	40
y	4	2	1	1/2	0,2	0,1



A55 d) Meine Funktion lautet: .....

Fragen zu S. 28 - 33

A56 : $y = a_o$, $a_o \in \mathbb{Q}$

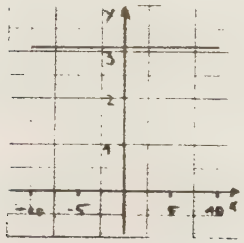
A57 : Eine Kurve ist eine dichte Folge von Punkten (auch geschlossene Linie genannt).

A58 : Die konstante Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $P(o|a_o)$

A59 : Parallele zur x-Achse

A6o : Zum Zeichnen einer konstanten Funktion benötigt man nur zwei Punkte, da eine Gerade durch zwei Punkte eindeutig festgelegt ist.

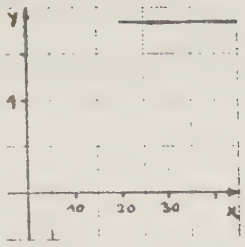
A61 : a)



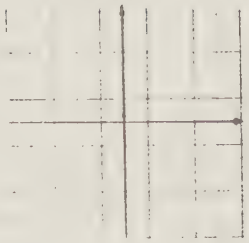
b)

Antwortbogen 5M Name: Klasse: Datum:

A61 c)



A62 d)



Fragen zu S. 33 - 35

A62: Erkennen des f-Typs Bestimmung der Formvariablen
Einsetzen der Formvariablen in die allg.Funktionsgleichung des jeweils vorliegenden Typs.

A63: Am ehesten erkennt man den f - Typ am Graphen.

A64: Eine Änderung der Formvariablen führt zu einer Verschiebung des Graphen prallel zur Abszisse (x-Achse).

A65: a) y = 8o

b) f - Typ unbekannt

c) y = - 0,5

A66: Meine f - Gleichung lautet:

.....

5M4

A66a Keine konstante Funktion:

Fragen zu S. 35 - 37

A67: "y proportional zu x" bedeutet: Der Funktionswert y ist stets ein Vielfaches des x-Wertes.

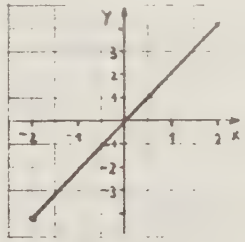
A68: Diese Aussage ist richtig, da für lineare Funktionen gilt: $y = a_1$

A69: Die f-Gleichung für lineare Funktionen lautet $y = a_1$
Ist x = O, so folgt daraus stets a_1 O = O. Deshalb ist der Funktionswert y stets Null, für x = O.

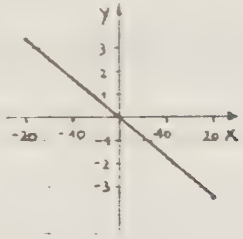
A7o: Für x = 1 ist $y = a_1 \cdot 1 = a_1$

A71: Ist a_1 positiv, so verläuft die Gerade im I. und III. Quadranten.
Ist a_1 negativ, so verläuft die gerade im II. und IV. Quadranten.

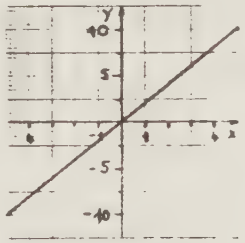
A72: a)



b)



c)



d)

Funktionsgleichung:

Antwortbogen 6M Name: Klasse: Datum:

A73 Die Höhendifferenz Δy zweier Punkte, die in x-Richtung um $\Delta x = 1$ entfernt sind, ist für lineare Funktionen immer gleich der Formvariablen a_1 (also $\Delta y = a_1$ für $\Delta x = 1$)

Fragen zu S. 37 - 38

A74 a) $a_1 = 0{,}1$

b) $a_1 = -0{,}8$

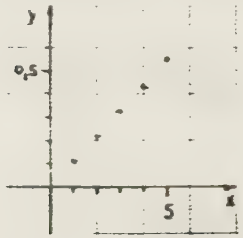
Fragen zu S. 49 - 53

A75: Erkennung f-Typ; Bestimmung von a_1; Einsetzen von a_1 in die allgemeine f-Gleichung für lineare Funktionen ; Probe .

A76 Indem man die Koordinaten eines Punktes des vorliegenden Graphen oder Wertetabelle in die berechnete f-Gleichung einsetzt.

A77: Bei der Berechnung der Formvariablen a_1 aus Wertetabellen rundet man meistens auf. Bestimmt man a_1 aus Graphen, so muß man stets Ablesefehler berücksichtigen. Deshalb muß man damit rechnen, daß die Koordinaten eines Punktes der Funktion die berechnete f-Gleichung nicht exakt erfüllen.

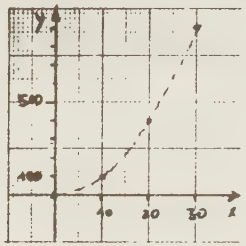
A78 a)



Funktionsgleichung lautet : $y = 0{,}11 \cdot x$

6Mf

A78 b)



Funktionsgleichung lautet : f - Typ unbekannt

a79: a) Funktionsgleichung lautet: $y = 500$

b) Funktionsgleichung lautet: f - Typ unbekannt

c) Funktionsgleichung lautet: $y = -0{,}01 \cdot x$

A80 a) $a_1 = \frac{3000 - 4000}{2 - 1} = -1000$

b) $a_1 = \frac{90 - 0}{-0{,}1-(-0{,}4)} = \frac{90}{0{,}3} = 300$

A81 Die Funktionsgleichung lautet :

$y = -0{,}4 \cdot x$

Rechenweg: 1) $a_1 = \frac{1{,}2 - (-0{,}6)}{3 - 1{,}5} = \frac{-0{,}6}{1{,}5}$

$= -0{,}4$

2) Einsetzen: $y = -0{,}4 \cdot x$

A82

Die Funktionsgleichung lautet :

.....

Bitte beantworten Sie folgende Frage :
Welches Interesse haben Sie am Lehrerunterricht?

1 2 3 4 5 6 7
neutral große Ablehnung

Welches Interesse haben Sie am Unterricht nach Lehrtexten?

1 2 3 4 5 6 7
neutral große Ablehnung

Antwortbogen 7M Name: Klasse: Datum:

Fragen zu S.41 - 43

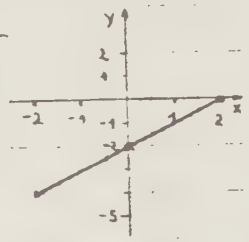
A83: Der Graph der allgemeinen linearen Funktion verläuft nicht durch den Ursprung (O O) des Koordinatensystems.

A84: a) Für $a_o = 0$ erhält man eine lineare Funktion

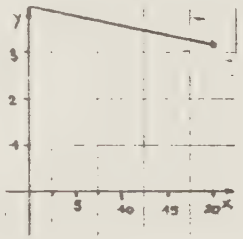
b) Für $a_1 = 0$ erhält man eine konstante Funktion.

A85: Die Punkte $P(0|a_o)$ und $P(1|a_1+a_o)$ sind stets leicht zu berechnen.

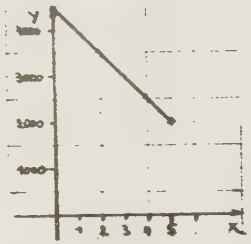
A86: a)



b)



c)



d)

Meine F-Gleichung lautet:

Fragen zu S. 43 - 44

7Mf

A87: a) Die Funktionsgleichung lautet : $y = 100 - 20 \cdot x$

Rechenweg: Die 2 Punkte $P(0|a_o) = P(0|100)$
und $P(1|a_o+a_1) = P(1|80)$
bestimmen. Man erhält sofort
$a_o = 100$ und $a_o + a_1 = 80$
Einsetzen von $a_o \Rightarrow 100 + a_1 = 80$ $a_1 = 80 - 100$
$a_1 = -20$

b) Die Funktionsgleichung lautet : $y = -5 + 0{,}5 \cdot x$

Bemerkung: Die Bestimmung des Funktionswertes y für x = 1 konnte nur sehr ungenau erfolgen.

Fragen zu S. 45 - 46

A88: 1) Bestimmung der Koordinaten zweier Punkte
2) Berechnung von a_1
3) Einsetzen von a_1 in $y = a_1x + a_o$
4) Einsetzen der Koordinaten eines Punktes in 3) und Bestimmung von a_o.

A89: a) Die Funktionsgleichung lautet: $y = -2 \cdot x + 6$

b) Die Funktionsgleichung lautet: $y = \frac{1}{33} \cdot x - 1$

c) Die Funktionsgleichung lautet: $y = -3 \cdot x + 12$

d) Meine Funktionsgleichung lautet:

.....

3.1 Test I

3.2 Test II

3.3 Lernspiel

TEST I 3.1

Gegeben sei die analytische Funktion f:

$f: x \rightarrow \frac{1}{3}x - 8$

STELLEN SIE IM BEREICH $x \in [0;30]$, $x \in \mathbb{Q}$ FÜR MINDESTENS 5 X-WERTE EINE WERTETABELLE AUF.

VERVOLLSTÄNDIGEN SIE FOLGENDE AUSSAGE:
JE GRÖßER DER X-WERT, DESTO ....

, DESTO .....

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6
s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6
s.unsicher s.sicher

AUF DEM SPRUNGTURM

In vielen Schwimmbädern findet man einen Sprungturm, von dem man aus verschiedenen *Höhen H* (1 m, 3 m, 5 m, 10 m) ins Wasser springen kann. Vielen wird schon Angst, aus 3 m oder 5 m Höhe zu springen. Mit Recht, denn die *Bewegungsenergie E* aufgrund des freien Falls kann bei schlechter Körperhaltung (Bauchplatscher) körperliche Schäden nach sich ziehen.

BERECHNEN SIE EINMAL FÜR DIE VERSCHIEDENEN SPRUNGBRETTHÖHEN H_m DIE BEWEGUNGSENERGIE E_{kin} EINES 500 NEWTON SCHWEREN SPRINGERS, WENN GILT:

$E_{kin} = 500 \cdot H_m + 250$

, DESTO ....

VERVOLLSTÄNDIGEN SIE FOLGENDE AUSSAGE:
JE GRÖßER DIE HÖHE H , DESTO ....

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6
s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6
s.unsicher s.sicher

2bm

Gegeben sei die analytische Funktion f:

$f: x \rightarrow + \frac{20}{x} - 1{,}5$

STELLEN SIE EINE WERTETABELLE DER FUNKTION f IM BEREICH $x \in [1;10]$, $x \in Q$ FÜR MINDESTENS 5 X-WERTE AUF.

VERVOLLSTÄNDIGEN SIE FOLGENDE AUSSAGE:

JE GRÖßER DER X-WERT, DESTO .....

, DESTO .....

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

1bm

2bp

LUFTPUMPE

Der *maximal erreichbare Reifendruck* p^{max} einer Luftpumpe hängt ab von dem *Querschnitt A* der Pumpe, von der *Kraft F*, mit der Sie drücken und der *Druckdifferenz* Δp, die für das Öffnen des Schlauchventils notwendig ist.

Nehmen wir an, die Pumpe soll mit einer Kraft $F_N = 90$ betreibbar sein, und das Schlauchventil öffne sich bei einer Druckdifferenz $\Delta p_{N/cm^2} = 2{,}5$

Dann besteht folgender Zusammenhang zwischen dem maximalen Reifendruck p^{max}_{N/cm^2}, den Sie mit dieser Pumpe erreichen können, und dem Querschnitt A_{cm^2} :

$$p^{max}_{N/cm^2} = \frac{90}{A_{cm^2}} - 2{,}5$$

BERECHNEN SIE FÜR 5 VERSCHIEDENE QUERSCHNITTE A_{cm^2} DEN MAXIMAL ERREICHBAREN REIFENDRUCK p^{max}_{N/cm^2} (IM BEREICH VON $A_{cm^2} = 1$ BIS $A_{cm^2} = 25$)

VERVOLLSTÄNDIGEN SIE FOLGENDE AUSSAGE:

JE GRÖßER DER QUERSCHNITT A , DESTO....

, DESTO .....

Sicherheit:

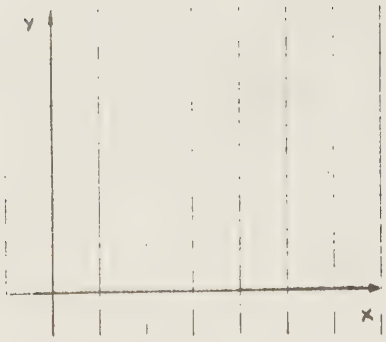
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

2bp

Gegeben sei folgende *Wertetabelle* einer Funktion f:

x	0,0	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
y	4,0	4,0	2,5	1,0	2,0	2,8	3,0	3,0



ZEICHNEN SIE DIE KURVE DER FUNKTION f. ($x \in \mathbb{Q}$)

BESTIMMEN SIE DIE X-KOORDINATE DES PUNKTES, BEI DER DER Y-WERT DER FUNKTION f SEINEN KLEINSTEN WERT ANNIMMT.

DER KLEINSTE Y-WERT DER FUNKTION LIEGT BEI

X = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

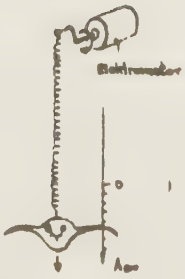
s.leicht s.schwer

Sicherheit:

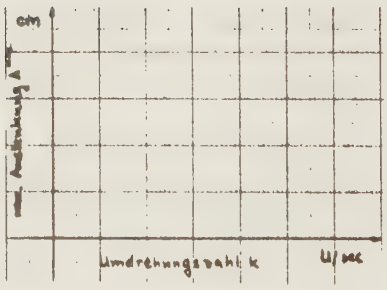
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

ERZWUNGENE SCHWINGUNG



In einem Spielzeugladen sieht man manchmal einen Plastikvogel, der an einer langen Feder auf und nieder schwingt. Das Schwingen des Vogels bewirkt ein Elektromotor, an dessen Achse das eine Ende der Feder an einem Stift befestigt ist.
Um festzustellen, ob die *maximale Auslenkung* A_{cm} des schwingenden Vogels von der *Umdrehungszahl k* (gemessen in Umdrehungen pro sec; kurz U/sec) des Motors abhängt, wurde die Umdrehungszahl langsam verändert und die Auslenkung A gemessen.



Es ergaben sich folgende Meßwerte:

$k_{U/sec}$	0,1	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,0	5,0
A_{cm}	1,0	1,0	2,5	4,0	2,0	1,2	0,4	0,1

STELLEN SIE DIESE MESSREIHE ALS KURVE DAR. ($k \in \mathbb{Q}$)

BESTIMMEN SIE DIE UMDREHUNGSZAHL $k_{U/sec}$, BEI DER DIE AUSLENKUNG A_{cm} IHREN GRÖSSTEN WERT ANNIMMT.

DIE AUSLENKUNG A_{cm} IST AM GRÖSSTEN FÜR

$k_{U/sec}$ = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Gegeben sei die folgende *Wertetabelle* einer Funktion f:

x	0,00	0,04	0,07	0,11	0,17	0,27	0,35	0,50
y	3,5	2,5	2,0	1,6	1,0	0,5	0,2	0,1

ZEICHNEN SIE DIE KURVE DER FUNKTION f. ($x \in \mathbb{Q}$)

BESCHREIBEN SIE MIT WENIGEN WORTEN DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEN X- UND Y-WERTEN.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Eine Stahlkugel wird in einem mit Öl gefüllten Glaszylinder fallen gelassen. Der zeitliche Verlauf der *Geschwindigkeit* v_{Kugel} der Kugel wurde experimentell bestimmt.

Es ergab sich folgende Meßreihe:

t_{Kugel}	0,00	0,12	0,21	0,33	0,51	1,05	1,50	3,50
v_{Kugel}	0,0	1,0	1,5	1,9	2,5	3,2	3,4	3,5

STELLEN SIE DIESE MESSREIHE ALS KURVE DAR.

BESCHREIBEN SIE MIT WENIGEN WORTEN DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER FALLZEIT t UND DER GESCHWINDIGKEIT v.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

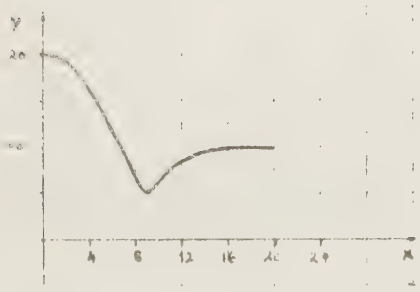
s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Gegeben sei folgende Kurve einer Funktion f:



X = ...

BESTIMMEN SIE DEN X-WERT, FÜR DEN DIE FUNKTION f DEN KLEINSTEN Y-WERT ANNIMMT.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

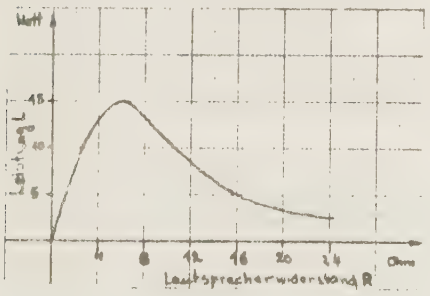
Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

LAUTSPRECHERWIDERSTAND

Die abgegebene *Leistung L* (gemessen in Watt) eines Stereoverstärkers hängt ab von dem *Widerstandswert R* (gemessen in Ohm) der angeschlossenen Lautsprecher. Für einen bestimmten Verstärker läßt sich dieser Sachverhalt durch folgende Funktion darstellen:



BEI WELCHEM WIDERSTAND R_{Ohm} DES LAUTSPRECHERS GIBT DER VERSTÄRKER SEINE GRÖSSTE LEISTUNG AB ?

R_{Ohm} = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

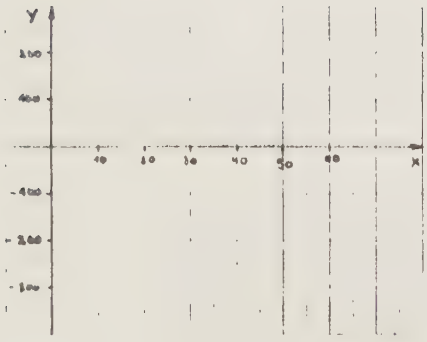
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

10am

Gegeben sei die Funktion f :

f: x → 190 - 6x



ZEICHNEN SIE DIE KURVE DER FUNKTION f FÜR $X \in [0;60]$, $X \in \mathbb{Q}$.
BESTIMMEN SIE DEN X-WERT, FÜR DEN DER ZUGEHÖRIGE Y-WERT GLEICH 0 IST.

DER Y-WERT IST 0 FÜR

X = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

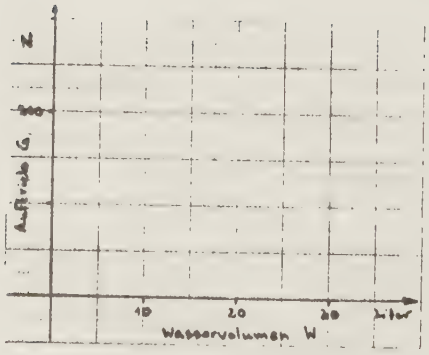
10am

10ap

AUFTRIEB

Eine *leere* Tonne mit einem *Volumen* $V_{Liter} = 29$ hat im Wasser eine *Tragfähigkeit* $G_N = 290$.
Läßt man Wasser in die Tonne einströmen, so ändert sich die Tragfähigkeit G_N in folgender Weise mit dem Volumen W_{Liter} des eingeströmten Wassers:

$G_N = 290 - 10 \cdot W_{Liter}$



GEBEN SIE DIESEN ZUSAMMENHANG FÜR WASSERVOLUMEN VON 0 BIS 20 LITER ALS KURVE WIEDER.
BESTIMMEN SIE DAS WASSERVOLUMEN W_{Liter}, FÜR DAS DIE TRAGFÄHIGKEIT G_N NULL WIRD.

DIE TRAGFÄHIGKEIT G_N IST NULL FÜR

W_{Liter} = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

10ap

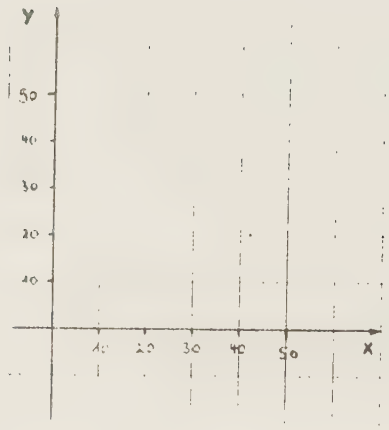
10bm

Gegeben sei die Funktion f:

$f: x \rightarrow \frac{50}{x}$

ZEICHNEN SIE DIE KURVE DER FUNKTION f FÜR $X \in [1;50]$, $X \in \mathbb{Q}$

BESTIMMEN SIE DEN X-WERT, FÜR DEN DER ZUGEHÖRIGE Y-WERT 4,5 IST.



DER Y-WERT IST 4,5 FÜR

X = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

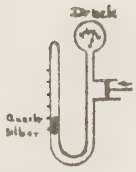
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

10bm

10bp

KOMPRESSIONSDRUCK



Es soll der Zusammenhang zwischen dem *Druck p* und dem *Volumen V* eines Gases in einem abgeschlossenen Raum untersucht werden.

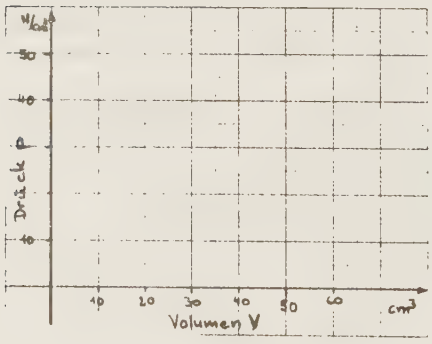
Hierzu wird in einem U-Rohr ein bestimmtes Gasvolumen durch einen Quecksilbertropfen eingeschlossen. Das U-Rohr ist auf der einen Seite verschlossen, während auf der anderen Seite mit einer Luftpumpe ein Überdruck erzeugt werden kann. Der Druck p_{N/cm^2}, mit dem das Gas komprimiert wird, kann an einem Druckmesser abgelesen werden. Das eingeschlossene Gasvolumen V_{cm^3} läßt sich aus der Lage des Quecksilbertropfens und dem Durchmesser des U-Rohres berechnen.

Es ergab sich folgender Zusammenhang zwischen dem Volumen V_{cm^3} und dem Druck p_{N/cm^2}:

$V_{cm^3} \rightarrow p_{N/cm^2} = \frac{60}{V_{cm^3}}$

STELLEN SIE DIESEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN V_{cm^3} UND p_{N/cm^2} FÜR VOLUMEN V_{cm^3} VON 1 BIS 60 GRAPHISCH DAR.

BESTIMMEN SIE DAS VOLUMEN V_{cm^3} , FÜR DAS DER DRUCK p_{N/cm^2} = 4,5 IST.



DER DRUCK p_{N/cm^2} = 4,5 FÜR

V_{cm^3} = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

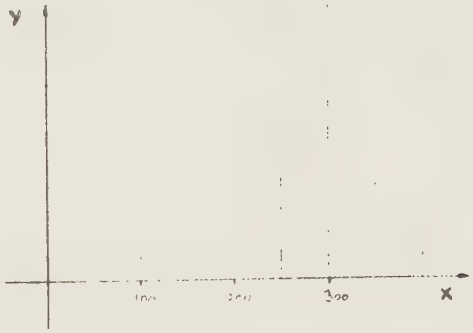
10bp

TEST II 3.2

1bm

Gegeben sei folgende Beschreibung einer Funktion f:

Die Funktionswerte (y-Werte) von f sind *konstant* von x=0 bis x=30, erreichen bei x=50 ihren *größten Wert* und sind für x-Werte größer 300 *Null*.



ZEICHNEN SIE EINE MÖGLICHE KURVE, DIE OBIGER BESCHREIBUNG GENÜGT.
(Es gibt viele mögliche Kurven, die obiger Beschreibung genügen! Zeichnen Sie bitte nur eine Kurve.)

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s. unsicher s. sicher

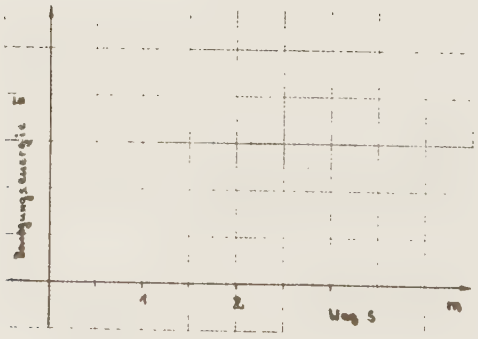
1bp

BEWEGUNGSENERGIE

Ein Spielzeugauto wird im Punkt A der Bahn angestoßen und fährt dann aufgrund der Erdanziehung den Abhang herunter.

Seine *Bewegungsenergie E*, die um so größer ist, je größer die *Geschwindigkeit* ist, möge sich in folgenderweise ändern:

Auf den ersten *0,2 m* ist E *konstant*. Dann steigt sie rasch an und erreicht nach *0,5 m* ihren *größten Wert*. Nach *3m* kommt der Wagen zum *Stehen*.



STELLEN SIE DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER ENERGIE E UND DEM ZURÜCKGELEGTEN WEG s GRAPHISCH DAR.
(Zur obigen Beschreibung gibt es viele mögliche Kurven. Zeichnen Sie bitte nur eine, die obiger Beschreibung genügt.)

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s. schwer

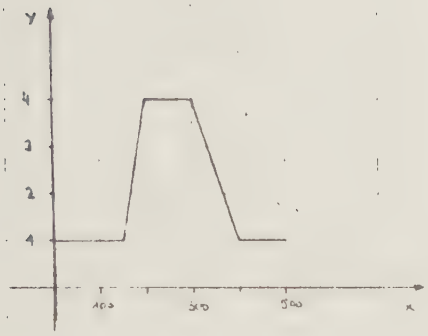
Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

1bp

Gegeben sei folgende *Kurve* einer Funktion f:



BESCHREIBEN SIE DEN KURVENVERLAUF IN IHREN EIGENEN WORTEN (NICHT IN TABELLENFORM).

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

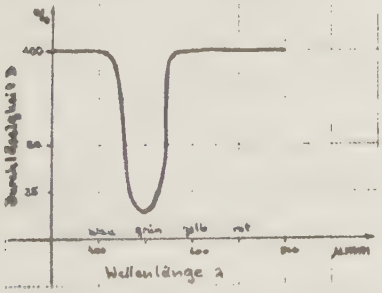
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

FARBFILTER

In der Photographie werden Farbfilter häufig zur Unterdrückung oder Hervorhebung bestimmter Farben verwendet. Man charakterisiert die Eigenschaften eines Filters durch die Angabe der *Durchlässigkeit D* (gemessen in %) für verschiedene *Wellenlängen* λ (gemessen in Millionstel Millimeter; kurz μmm).
Wird Licht einer bestimmten Wellenlänge vollständig von dem Filter "zurückgehalten", so ist die Durchlässigkeit $D_{\%} = 0$ für diese Wellenlänge.
Geht alles Licht einer bestimmten Wellenlänge durch das Filter hindurch, so ist die Durchlässigkeit $D_{\%} = 100$ für diese Wellenlänge.

In der folgenden *Kurve* ist der Zusammenhang zwischen der Durchlässigkeit $D_{\%}$ und der Wellenlänge (Farbe) $\lambda_{\mu mm}$ des Lichtes für ein bestimmtes Filter dargestellt:



BESCHREIBEN SIE DIE EIGENSCHAFTEN DES FILTERS IN IHREN EIGENEN WORTEN (NICHT IN TABELLENFORM).
GEBEN SIE AN, OB DER FILTER FÜR LANDSCHAFTSAUFNAHMEN ZU VERWENDEN IST.

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

DIESER FILTER IST FÜR LANDSCHAFTSAUFNAHMEN

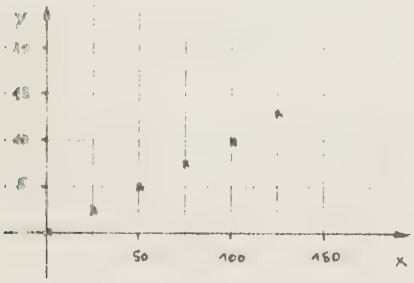
NICHT ☐
SEHR GUT ☐
ICH WEISS ES NICHT ☐

ZU VERWENDEN.

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Gegeben seien folgende Punkte einer Funktion, die im Bereich $x \in [0; 160]$ als analytische Funktion darstellbar sei:



GEBEN SIE DIE FUNKTIONSGLEICHUNG AN, DIE ZU DER OBEN DARGESTELLTEN FUNKTION GEHÖRT.

GEBEN SIE DEN X-WERT DER FUNKTION FÜR Y= 15 AN.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

DIE FUNKTIONSGLEICHUNG FÜR Y LAUTET:

Y = ...

FÜR Y= 15 IST DER X-WERT

X = ...

Sicherheit:

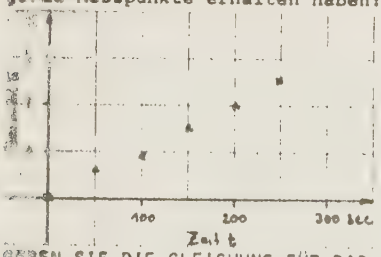
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s. sicher

SANDUHR

Alexa hat sich eine primitive Sanduhr gebaut. Sie besteht aus einem Glaskolben, der an einer Seite eng zuläuft (s.Abb.). Um festzustellen, wie genau ihre Sanduhr "geht", führt sie folgenden Versuch durch:

Sie befestigt die Sanduhr über einer Waage und bestimmt für verschiedene *Zeitpunkte* t_{sec} das *Gewicht* G_N des schon ausgeflossenen Sandes. Den Zusammenhang zwischen dem Gewicht G_N des Sandes und der verstrichenen Zeit t_{sec} stellt sie graphisch dar. Sie möge folgende Messpunkte erhalten haben:



GEBEN SIE DIE GLEICHUNG FÜR DAS GEWICHT G_N DES AUSGEFLOSSENE SANDES AN, DIE DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN G_N UND t_{sec} ANGENÄHERT BESCHREIBT.

WIEVIEL ZEIT IST VERSTRICHEN, WENN DAS GEWICHT DES AUSGEFLOSSENEN SANDES $G_N = 3$ IST ?

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

DIE GLEICHUNG FÜR G_N LAUTET:

G_N = ...

FÜR $G_N = 3$ IST

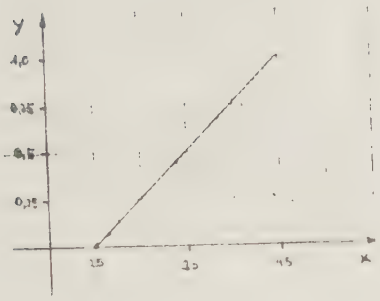
t_{sec} = ...

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Gegeben sei folgende *Kurve* einer analytischen Funktion f:



DIE FUNKTIONSGLEICHUNG FÜR f LAUTET

Y = ...

GEBEN SIE DIE FUNKTIONSGLEICHUNG AN, DIE ZU DER OBEN DARGESTELLTEN FUNKTION f GEHÖRT.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

Sicherheit:

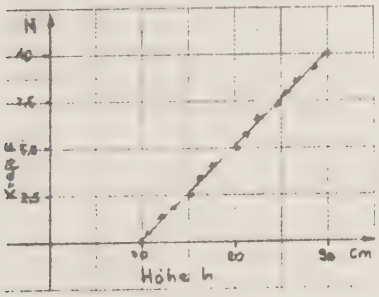
1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

FEDERPENDEL

Ein Körper mit der *Masse* $m_{kg} = 1$ ist mit einer Feder an der Zimmerdecke befestigt. Die *Kraft* F_N, mit der der Körper auf einen darunterstehenden Tisch drückt, steht im Zusammenhang mit der *Höhe* h_{cm} des Tisches.

Dieser Zusammenhang ist in dem folgenden *Graph* dargestellt.



DIE GLEICHUNG FÜR F LAUTET:

F_N = ...

GEBEN SIE DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER KRAFT F_N UND DER HÖHE DES TISCHES h_{cm} ALS GLEICHUNG WIEDER.

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

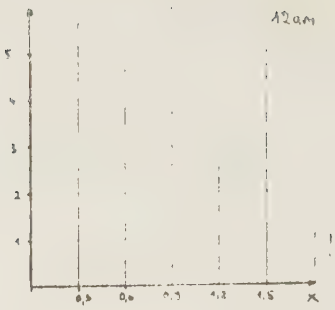
Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

Gegeben sei die folgende *Wertetabelle* einer analytischen Funktion f für $x \in \mathbb{Q}$

x	0	0,3	0,6	0,9	1,2
y	30	24	18	12	6



GEBEN SIE DIE FUNKTIONSGLEICHUNG DER OBEN ALS WERTETABELLE DARGESTELLTEN FUNKTION f AN.

BESTIMMEN SIE DEN X-WERT, FÜR DEN DER Y-WERT NULL IST.

DIE FUNKTIONSGLEICHUNG FÜR f LAUTET:

Y = ...

Y IST NULL FÜR

X = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

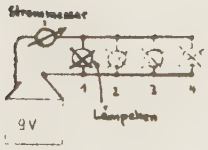
s.leicht s. schwer

Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

s. unsicher s. sicher

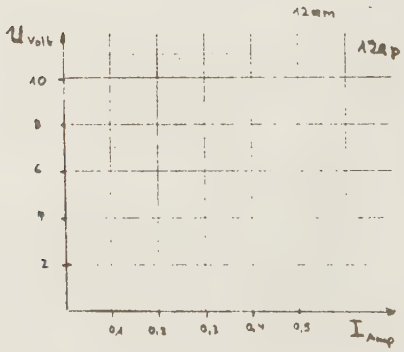
KURZSCHLUSS-STROM



An eine Taschenlampe wurden nacheinander 1, 2, 3, und 4 Lämpchen angeschlossen (s. Abb.). Dabei stellt man fest, daß die *Batteriespannung* U_{Volt} mit der Höhe des *Stromes* I_{Ampere}, der aus der Batterie entnommen wird, abfällt.

Folgender Zusammenhang zwischen dem entnommenen Strom I_{Amp} und der Batteriespannung U_{Volt} wurde gemessen:

I_{Amp}	0	0,1	0,2	0,3	0,4
U_{Volt}	9	7,1	5,5	4,3	2,2



GEBEN SIE DEN ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DEM ENTNOMMENEN STROM I_{Ampere} UND DER BATTERIESPANNUNG U_{Volt} ALS GLEICHUNG WIEDER.

FÜR WELCHEN STROM I_{Ampere} IST DIE BATTERIESPANNUNG U_{Volt} GLEICH NULL.

DIE GLEICHUNG FÜR U_{Volt} LAUTET:

U_{Volt} = ...

U_{Volt} IST NULL FÜR

I_{Ampere} = ...

Schwierigkeit:

1 2 3 4 5 6

s.leicht s.schwer

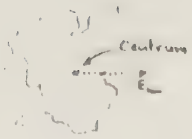
Sicherheit:

1 2 3 4 5 6

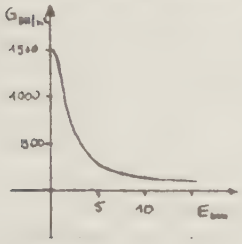
s.unsicher s.sicher

ARBEITEN UND WOHNEN

In der City reißen sich die Banken, Geschäfte und Versicherungen um die Grundstücke und überbieten sich gegenseitig. Die City ist für sie der günstigste Standpunkt.

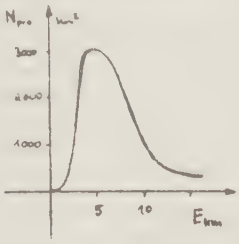


In den folgenden 2 Abbildungen sind der Entfernung E_{km} vom Stadtzentrum die entsprechenden Grundstückspreise G_{DM/m^2} und die Zahl der Wohnungen $N_{pro\,km^2}$ zugeordnet.



Grundstückspreise G_{DM/m^2}

Abb. 1



Zahl der Wohnungen $N_{pro\,km^2}$

Abb. 2

Aufgabe:

1.) Begründen Sie den in Abb. 2 dargestellten Zusammenhang zwischen E_{km} und $N_{pro\,km^2}$

(Bitte keine mathematische Beschreibung geben!)

2.) In welcher Entfernung E_{km} vom Zentrum wohnen die meisten Kinder pro km² ?

Zu 1.) _____

Zu 2.) Die Entfernung beträgt etwa E_{km} = _____

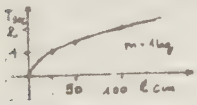
Sicherheit: 1 2 3 4 5 6
s.unsicher s.sicher

P E N D E L

Eine Stahlkugel, an einem Faden aufgehängt, kann hin- und herpendeln. Solche Pendel werden beim Bau von Uhren benötigt.

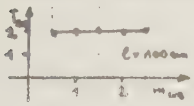
Die Zeitdauer, die ein Pendel braucht, um von A nach B und wieder nach A zu schwingen, nennt man Schwingungsdauer T.

Untersucht man den Zusammenhang zwischen der Länge ℓ_{cm} des Fadens und der Schwingungsdauer T_{sec} für ein Stahlkugel mit der Masse m von 1 kg, so erhält man folgende Funktion:



Zusammenhang zwischen ℓ_{cm} und T_{sec} für eine Masse m_{kg} = 1.

Der Zusammenhang zwischen der Masse m_{kg} der Stahlkugel und der Schwingungsdauer T_{sec} für eine Fadenlänge ℓ_{cm} = 100 ist durch folgende Funktion gegeben.



Zusammenhang zwischen m_{kg} und T_{sec} für eine Fadenlänge ℓ_{cm} = 100.

Aufgabe:

1.) Wie groß muß ein Uhrmacher ℓ_{cm} und m_{kg} etwa wählen, damit sein Pendel eine Schwingungsdauer T_{sec} = 1 besitzt?

2.) Welche der beiden Größen beeinflußt die Schwingungsdauer nicht?

Zu 1.) Die Schwingungsdauer T des Pendels ist etwa 1 sec, wenn _____

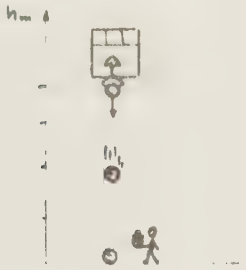
Zu 2.) Die Größe _____

beeinflußt die Schwingungsdauer T nicht.

Begründung: _____

Sicherheit 1 2 3 4 5 6
s.unsicher s.sicher

EIN PHYSIKALISCHER VERSUCH



Ein Physiklehrer stellt Dir die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen

Fallhöhe h_m und der Fallzeit t_{sec}

durch einen Versuch festzustellen.

Weiterhin sollst Du untersuchen, ob dieser Zusammenhang zwischen h und t durch einen Rechenausdruck (analytische Funktion) beschreibbar ist.

Gib bitte die wichtigsten Schritte an, wie Du diese Aufgabe lösen würdest.

(Bitte keinen Aufsatz anfertigen!)

1. Schritt: _____

2. Schritt: _____

3. Schritt: _____

4. Schritt: _____

5. Schritt: _____

Sicherheit: 1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

WER WIRD DENN GLEICH IN DIE LUFT GEHEN.

Ein Lernspiel von Karl Hoffmann

1.1

Stelle dir vor, du lebst im 19. Jahrhundert und hättest einen Batzen Geld geerbt. Da du versessen bist, in die Luft zu gehen, willst du dir einen Freiballon bauen. Zu dieser Zeit wußte man schon, daß ein mit Wasserstoff gefüllter Ballon eine Person durch die Lüfte tragen kann.

Also überlegst du dir, wie groß der Ballon werden muß. Im 19. Jahrhundert wußtest du aber noch nicht, welcher Zusammenhang zwischen der Größe (Volumen V) des Ballons und seiner Tragfähigkeit (Hubgewicht G) besteht. Du weißt also nur, daß das Ballonvolumen V_m^3 umso größer sein muß, je größer das Hubgewicht G_{kg} sein soll.

Beachte: Das Hubgewicht G_{kg} setzt sich aus dem Gewicht des Ballons, dem Korbgewicht und den übrigen Lasten zusammen (Personen, Ausrüstung usw.)

Deine Aufgabe ist nun:
Du sollst dir einen Weg überlegen, wie du mit möglichst wenig Kosten und Arbeit herausfinden kannst, wie groß das Gasvolumen V_m^3 sein muß, um ein Hubgewicht von G_{kg} = 500 über dem Boden schwebend zu halten.

Welchen Weg würdest du wählen?

(Schreibe deinen Vorschlag stichwortartig auf das Antwortblatt)

1.2

Was würdest Du zuerst tun?
(Bitte wähle Dir nur einen Weg aus und notiere die entsprechende Nummer auf Deinem Antwortblatt)

1.) Ich würde mir durch einfache Überlegungen ausdenken, wie ich das Gasvolumen V_m^3 berechnen kann. Blatt 2.1

2.) Ich würde den Gewichtsunterschied ΔG_{kg} zwischen 1 m^3 Wasserstoffgas und 1 m^3 Luft durch einen Versuch bestimmen. Blatt 1.2

3.) Ich würde in einem Physikbuch unter dem Stichwort "Luftballon" nachlesen. Blatt [illegible]

4.) Ich würde einen Plan für einen 10.000 m^3 großen Ballon entwerfen, ihn bauen und ausprobieren, ob er ein Hubgewicht G_{kg} = 500 tragen kann. Blatt 2.4

5.) Ich würde in einem kleineren Ballon verschiedene Mengen Wasserstoffgas (z.B. für 1m^3, 3m^3, 5m^3 und 20m^3) einfüllen und das zugehörige Hubgewicht G_{kg} durch einen Versuch bestimmen. Blatt [illegible]

6.) Ich würde den Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} erst einmal in einem Koordinatensystem als Funktion darstellen. Blatt [illegible]

7.) Ich würde für einen kleinen Ballon mit V_m^3=1 das zugehörige Hubgewicht G_{kg} durch einen Versuch bestimmen. Durch diese Messung bin ich durchaus in der Lage, den mathematischen Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} anzugeben. Blatt [illegible]

8.) Ich weiß nicht, was ich tun würde. Blatt [illegible]

2.1

Du kannst nicht alles durch Überlegen lösen! Durch reine Überlegungen herauszufinden, wie man das Gasvolumen V_m^3 berechnen kann, ist nicht möglich, da man ja keine genaueren Angaben über den Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} hat.

Du mußt zurück zu Blatt 1.2 und Dir einen besseren Weg überlegen.

→ 1.2

2.2

Dieser Weg ist nicht schlecht! Welche der folgenden Versuchsanordnungen würdest Du wählen, um den Gewichtsunterschied ΔG_{kg} von $1m^3$ Wasserstoffgas und $1m^3$ Luft zu ermitteln?

1.) Ich würde zuerst einen Ballon mit $1m^3$ Luft füllen und sein Gewicht bestimmen. Dann würde ich den gleichen Ballon mit $1m^3$ Wasserstoff füllen und ebenfalls wiegen. Die Differenz beider Gewichte ergibt das Hubgewicht G_{kg} von $1m^3$ Wasserstoff. → 3.2

2.) Ich würde einen Ballon mit einem Volumen von $2m^3$ zur Hälfte mit Wasserstoff und zur Hälfte mit Luft füllen und das Gewicht des Ballons bestimmen. Dieses Gewicht entspricht dem Hubgewicht von $1m^3$ Wasserstoff.

→ 3.1

2.3

Im Physikbuch würdest Du unter dem Stichwort "Luftballon" folgendes geschrieben finden:

§ 26. Auftrieb in Gasen, Luftballon

Leichte, mit Leuchtgas gefüllte Seifenblasen wiegen weniger als die von ihnen verdrängte Luft und steigen deshalb in die Höhe. Je größer die Blasen sind, um so mehr wirkt sich die Differenz zwischen dem Luft- und dem Gasgewicht aus, so daß große Fesselballone und Freiballone von über 1000 m³ Rauminhalt Menschen und Lasten in die Höhe tragen können.

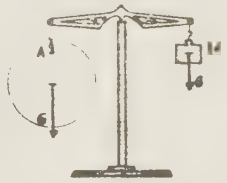


Abb. 106. Nachweis des Auftriebs in Luft

Während der Freiballon dem Wind ausgeliefert ist, bewegen sich die Luftschiffe mit motorangetriebenen Propellern willkürlich vorwärts. Eine große Bedeutung erlangten die aus einem Leichtmetallgerippe starr gebauten Luftschiffe, die der Graf Ferdinand von Zeppelin (1838–1917) am Bodensee erbaute. Sie wurden mit Wasserstoff und später mit dem nicht brennbaren Helium gefüllt. Durch Seiten- und Höhenruder konnten diese „Zeppeline" ihren Kurs ändern. Das größte deutsche Luftschiff LZ 129 war 245 m lang, hatte als größten Durchmesser 41,2 m und ein Volumen von 200 000 m³. Leider brannte es auf seinem ersten stolzen Amerikaflug 1937 in Lakehurst aus. Seitdem hat das Flugzeug die Luftschiffe völlig verdrängt.

Was nun?

1.) Ich würde einen großen Ballon mit 10.000 m^3 bauen. → 2.4

2.) Ich wüßte immer noch nicht, was ich tun würde. → 1.5

3.) Ich würde mir noch einmal die verschiedenen Vorschläge vom letzten Blatt ansehen. Vielleicht erscheint mir jetzt einer der Wege für sinnvoll. → 1.2

2.4

Hast Du auch nicht vergessen, die Nummer des Blattes, was Du jetzt öffnen willst, auf dem Antwortblatt zu notieren?

2.5

Dieser Weg ist nicht schlecht! Welche der folgenden Versuchsanordnungen würdest Du wählen, um das Hubgewicht G_{kg} von 1 m^3, 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 zu bestimmen?

1.) Ich würde einen Ballon, der 2o m^3 faßt, zuerst mit 1 m^3 Wasserstoffgas füllen und solange Gewichtssteine an den Ballon hängen, bis er gerade noch schwebt. Dann würde ich den Versuch für 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 wiederholen. Die so bestimmten Meßwerte entsprechen den Hubgewichten G_{kg} der jeweiligen Gasmenge V_m^3. → 3.3

2.) Ich würde einen Ballon, der 2o m^3 faßt, zuerst mit 1 m^3 Wasserstoffgas füllen und solange Gewichtssteine an den Ballon hängen, bis er gerade noch schwebt. Dann würde ich den Versuch für 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 wiederholen. Danach müßte ich noch das Gewicht der Ballonhülle bestimmen, damit ich das Hubgewicht G_{kg} bestimmen kann. → 3.5

3.) Ich würde mir 4 verschieden große Ballons herstellen, die jeweils 1 m^3, 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 fassen. Diese 4 Ballons würde ich mit Wasserstoffgas füllen und durch Anhängen von Gewichten bestimmen, welches Gewicht sie tragen können. Die so bestimmten Meßwerte entsprechen den Hubgewichten G_{kg} der jeweiligen Gasmenge V_m^3. → 3.4

2.6

Hast Du auch nicht vergessen, die Nummer des Blattes, was Du jetzt öffnen willst, auf dem Antwortblatt zu notieren?

2.8

Wenn Du nicht weißt, was Du tun sollst, mache Dir noch einmal folgendes klar:

Du willst wissen, wieviel m^3 Wasserstoffgas Du brauchst, um 500 kg durch die Lüfte zu tragen. Du mußt also herausfinden, welcher Zusammenhang zwischen dem Gasvolumen V_m^3 und dem jeweiligen Hubgewicht G_H dieser Gasmenge besteht. Lies Dir nun noch einmal die möglichen Wege auf Blatt 1.2 sorgfältig durch.

→ 1.2

2.7

Du bist schon auf dem richtigen Weg. Welche der folgenden Versuchsanordnungen würdest Du wählen, um das Hubgewicht G_H von $1m^3$ Wasserstoffgas zu bestimmen?

1.) Ich würde einen Ballon, der ein Volumen von $1m^3$ hat, mit Wasserstoffgas füllen und solange Gewichtssteine daran hängen, bis er gerade noch schwebt. Damit weiß ich das Hubgewicht G_H von $1m^3$ Wasserstoff. → 3.6

2.) Ich würde einen Ballon, der ein Volumen von $1m^3$ hat, mit Wasserstoffgas füllen und solange Gewichtssteine daran hängen, bis er gerade noch schwebt.
Dann würde ich das Gewicht der Ballonhülle bestimmen. Damit kann ich das Hubgewicht G_H von $1m^3$ Wasserstoff angeben. → 3.2

3.1

Nehmen wir an, Deine Ballonhülle wiegt 1 kg, dann würdest Du feststellen, daß Dein Ballon ein Gewicht von 0,2 kg tragen kann. Diese 0,2 kg entsprechen nicht der Hubkraft G von $1m^3$ Wasserstoffgas. Die Hubkraft G setzt sich (wie am Anfang ausdrücklich gesagt) aus den angehängten Gewichten und dem Gewicht der Ballonhülle (im vorliegenden B. 1kg) zusammen. Was nun?

Wenn Du Deine Idee mit der Bestimmung der Gewichtsdifferenz ΔG weiter verfolgen willst, gehe nach 2.2 zurück → 2.2

Wenn Du Dir aber einen neuen Weg suchen möchtest, dan gehe zurück nach 1.2 → 1.2

3.2

Du erhälst ein Hubgewicht $G_{kg} \simeq 1{,}4$ für ein Gasvolumen von $V_{m^3} = 1{,}15$.

Eigentlich wolltest Du ja den Wert für 1 m^3 und nicht für 1,15 m^3 bestimmen. Leider war es für Dich zu schwierig, den Ballon genau 1 m^3 groß zu machen.

Außerdem hast Du bei der Versuchsdurchführung gemerkt, daß obiges Ergebnis von $G_{kg} = 1{,}4$ nur sehr ungenau bestimmt werden konnte.

Was würdest Du nun tun?

Ich würde aufgrund obiger Messung den mathematischen Zusammenhang zwischen V_{m^3} und G_{kg} bestimmen. → 4.1

Ich würde den Versuch z.B. für 3 m^3, 5 m^3 und 20 m^3 wiederholen. → 3.5

3.3

Du würdest aufgrund Deines Versuchs folgende Meßwerttabelle erhalten:

V_{m^3}	1,15	2,92	5,31	2o,15
g_{kg}	o,3	2,4	5,4	22,9

Hierzu folgende Bemerkungen:

1. Die Volumen 1 m^3, 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 konnten beim Versuch nicht so genau eingehalten werden. Mal strömte etwas mehr Gas in den Ballon, mal etwas weniger.

2. Die Gewichte g_{kg}, die Du bestimmt hast, entsprechen nicht den Hubgewichten G_{kg} der jeweiligen Menge Wasserstoffgas. Denn das Hubgewicht G_{kg} setzt sich aus den angehängten Gewichten g_{kg} und dem Gewicht der Ballonhülle zusammen. Du aber hast das Gewicht der Ballonhülle nicht bestimmt. Kehre deshalb zurück zu Blatt 2.5 und wähle einen besseren Weg. → 2.5

3.4

Du würdest aufgrund Deines Versuchs folgende Meßwerttabelle erhalten:

V_{m^3}	1,15	2,92	5,31	2o,15
g_{kg}	1,o	2,7	5,1	22,9

Hierzu folgende Bemerkungen:

1.) Die Volumen 1 m^3, 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 konnten beim Versuch nicht so genau eingehalten werden. Mal strömte etwas mehr Gas in den Ballon, mal etwas weniger.

2.) Die Gewichte g_{kg}, die Du bestimmt hast, entsprechen nicht den Hubgewichten G_{kg} der jeweiligen Menge Wasserstoffgas. Denn das Hubgewicht G_{kg} setzt sich aus den angehängten Gewichten g_{kg} und dem Gewicht der Ballonhülle zusammen. Du aber hast das Gewicht der Ballonhülle nicht bestimmt. Kehre deshalb zurück zu Blatt 2.5 und wähle einen besseren Weg. → 2.5

3.5

Als Ergebnis Deines Versuchs erhältst Du folgende Meßwerttabelle:

V_{m^3}	1,15	2,92	5,31	2o,15
G_{kg}	o,9	3,3	6,4	24,2

Hierzu folgende Bemerkungen: Das Volumen 1 m^3, 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3 konnte beim Versuch nicht so genau eingehalten werden. Mal strömte etwas mehr Gas in den Ballon, mal etwas weniger.

Was nun?

1. Ich würde obige Tabelle graphisch darstellen. → 5.2

2. Ich würde aufgrund obiger Wertetabelle die Funktionsgleichung bestimmen, die den Zusammenhang zwischen V_{m^3} und G_{kg} angenähert wiedergibt. → 5.3

3.6

Aufgrund Deines Versuchs würdest Du feststellen, daß Dein Ballon ein Gewicht von g_{kg} =o,3 tragen kann. Damit weißt Du aber noch nicht das Hubgewicht G_{kg} der entsprechenden Menge Wasserstoffgas.
Denn das Hubgewicht G_{kg} setzt sich aus dem angehängten Gewicht und dem Gewicht der Ballonhülle zusammen. Du aber hast das Gewicht der Ballonhülle nicht bestimmt.
Kehre deshalb zurück zu Blatt 2.7 und wähle einen besseren Weg. → 2.7

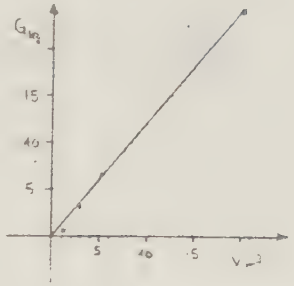
4.1

Bei Deinem Versuch hast Du für V_m=1,15 ein Hubgewicht von G_{kg} =1,4 gemessen. Allerdings war diese Messung, wie schon erwähnt, sehr ungenau. Das bedeutet, daß Du erhebliche Ungenauigkeiten bei der Berechnung des notwendigen Ballonvolumens in Kauf nehmen müßtest. Aus Kostengründen kannst Du Dir aber nicht leisten, aufgrund dieser Ungenauigkeiten einen Ballon zu bauen.
Deshalb wiederhole die Messung für 3 m^3, 5 m^3 und 2o m^3. → 3.5

4.2

Du hast nun Deine Meßwerttabelle graphisch dargestellt:

V_m^3	1,15	2,92	5,31	2o,15
G_{kg}	o,9	3,3	6,4	24,2



Was würdest Du nun tun?

1. Ich wäre in der Lage, aufgrund obiger Darstellung die Gleichung anzugeben, die den Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} angenähert wiedergibt.
   Schreibe Deine Lösung auf Dein Antwortblatt und bestimme das notwendige Volumen Deines Ballons.
2. Ich wäre in der Lage den Funktionstyp, aber nicht die entsprechende Gleichung anzugeben.
   Schreibe Deine Lösung auf das Antwortblatt und öffne dann [illegible]
3. Ich wäre nicht in der Lage den Funktionstyp oder die entsprechende Gleichung anzugeben. → [illegible]

4.3

Du hattest folgende Meßwerttabelle durch den Versuch erhalten:

V_m^3	1,15	2,92	5,31	2o,15
G_{kg}	o,9	3,3	6,4	24,2

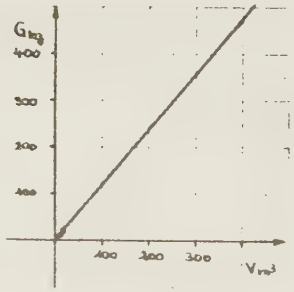
Du wolltest nun die Gleichung bestimmen.

Was würdest Du tun?

1. Ich wäre in der Lage, aufgrund obiger Tabelle die Gleichung aufzustellen, die den Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} angenähert wiedergibt.
   Schreibe Deine Lösung auf Dein Antwortblatt und bestimme das notwendige Volumen Deines Ballons.
2. Ich wäre nicht in der Lage, die Gleichung zu bestimmen, da die Tabelle zu unübersichtlich ist. Ich würde die Tabelle nun doch graphisch darstellen. → [illegible]

5.1

Hier ist nun der Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} graphisch dargestellt. Die Meßpunkte aufgrund Deines Versuchs sind eingezeichnet.



Bestimme nun aufgrund dieser Darstellung das Gasvolumen V_m^3 Deines Wasserstoffballons, der ein Hubgewicht von 500 kg tragen kann.

Trage diesen Wert auf Deinem Antwortbogen ein.

5.1

ANTWORTBLATT N A M E: KLASSE: PHYSIKNOTE:

1.) Welchen Weg würdest du wählen?

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

_____

2.) Öffne nun das Blatt 1.2

Wenn der Platz nicht ausreicht bitte Rückseite benutzen

1. Als erstes möchte ich Blatt _____ öffnen.
2. dann Blatt _____
3. Blatt _____
4. Blatt _____
5. Blatt _____
6. Blatt _____
7. Blatt _____
8. Blatt _____
9. Blatt _____
10. Blatt _____
11. Blatt _____
12. Blatt _____
13. Blatt _____
14. Blatt _____

3) Mein Ergebnis lautet:

1. Der mathematische Zusammenhang zwischen V_m^3 und G_{kg} wird durch die Funktionsgleichung (oder wenn Du diese nicht bestimmen konntest, durch den Funktionstyp)

_____ beschrieben.

2. Das Ballonvolumen muß

_____ m^3 betragen für ein Hubgewicht G_{kg} = 500

4.1 Operationsanalyse

4.2 Operationen

4.3 Auswertanweisung

4.4 Code Aufgabenmerkmale

4.5 Methodenprobleme

Analyse der Operationsketten von Darstellungstransformationen

Die Analyse geht davon aus, daß man Transformationen durch einen linearen Algorithmus beschreiben kann, obwohl sowohl die Art der Einzeloperationen als auch deren Sequenzierung noch eine Funktion der Kenntnisse sind. Dadurch können Verzweigungen auftreten oder auch alternative Algorithmen für die gleiche Transformation bestehen. Vereinfachungen scheinen aber deshalb gerechtfertigt, weil die untersuchten Schüler nicht sehr viel Zeit und Übung hatten, um ein differenzierteres Antwortverhalten auszubilden. So wurde z.B. bei der Transformation GR → AD von Ursprungsgeraden angenommen, daß Schüler zur Bestimmung der Steigung die allgemeine Steigungsformel benutzten ($q_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$).

Im folgenden werden die Lösungswege deshalb so angesetzt, daß sie möglichst wenig von speziellen Kenntnissen über bestimmte Funktionstypen Gebrauch machen. Unter diesen allgemeinen Gesichtspunkten gilt dann aber:

1) Die Transformation AD→GR ist eine zweistufige Transformation, die sich darstellen läßt durch AD→WT→GR. In ihr sind also die Transformationen AD→WT und WT→GR enthalten.

2) Die Transformation WT→AD ist in der Regel ebenfalls eine zweistufige Transformation WT→GR→AD, da der Funktionstyp bei Wertetabellen mit nicht äquidistanten Intervallen schwer erkennbar ist.

1. Operationskette der Transformation Analytische Darstellung in Graph (AD→GR)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine analytische Darstellung $a \to f(a)$, $a \in [a_1;a_2]_Q$. Gesucht ist die Kurve der Funktion. Dabei wird unter Kurve eine geschlossene Linie verstanden ($a \in Q$).
Es wurde nun untersucht:
Welche Operationen (OP) muß ein Schüler kennen und vollziehen können und an welchem Ergebnis (E) erkennt man, daß er diese Operation beherrscht?
Es ergab sich folgender Ablauf:
Schüler (S) muß ganz allgemein wissen, daß zur graphischen Darstellung die geordneten Paare der Funktion bekannt sein müssen (WT).
Er muß also wissen, wie man aus AD die WT erzeugt (AD→WT). Erst dann kann er mit der Lösung dieses Aufgabentyps beginnen.

1.1 Operationskette für Transformation AD→WT

OP1: S weiß, daß die Komponenten geordneter Paare durch zugehörige Platzhalter eindeutig gekennzeichnet werden müssen. S kann Platzhalter in Zuordnungsvorschrift identifizieren.

E 1: S gibt Platzhalter richtig an.

OP2: S kann, falls notwendig, Dimension identifizieren.

E 2: S gibt, wenn notwendig, Dimension an.

OP3: S weiß, daß der Bereich einer Funktion beachtet werden muß. Er kann die Bereichsangaben verstehen und weiß, daß Wertetabelle und Graph stets die Bereichsgrenzen mitenthalten sollten.

E 3: S gibt Bereichsgrenzen der Funktion mit an.

OP4: S kann die angegebene Zuordnungsvorschrift als Rechenvorschrift interpretieren und die zugeordneten Funktionswerte berechnen.

E 4: S hat zugeordnete Funktionswerte richtig wiedergegeben.

OP 5: S weiß, daß für eine Darstellung der Funktion weitere geordnete Paare notwendig sind, wobei die Auswahl der Argumentwerte willkürlich ist, so lange sie den angegebenen Bereich überdeckt.
Er weiß, daß durch geschickte Auswahl der Argumentwerte man Rechenerleichterungen erreichen kann.

E 5: S wählt solche Argumentwerte, die für jeweilige Zuordnungsvorschrift günstig sind und erhält einfache Funktionswerte.

Damit ist im wesentlichen die Transformation AD→WT abgeschlossen. Im nächsten Schritt muß der Schüler den Übergang WT→GR vollziehen.

1.2 Operationskette für Transformation Wertetabelle in Graph (WT→GR)

OP 6: S weiß, daß zur graphischen Darstellung Koordinatensystem dient.
S weiß, daß Definitionsbereich und Wertebereich für die Wahl des Ausschnittes beachtet werden müssen.

E 6: S zeichnet Achsen ein.

OP 1: S weiß, daß zur Kennzeichnung der Achse, auf der die Elemente einer bestimmten Menge dargestellt werden, die entsprechenden Platzhalter angegeben werden müssen.

E 1: S gibt Platzhalter richtig an.

OP 2: S kann, falls notwendig, Dimension identifizieren.

E 2: S gibt, wenn notwendig, Dimension an.

OP 7: S weiß, daß für die Darstellung von Punkten Maßstäbe festgelegt werden müssen und kann anhand des Definitions- und Wertebereiches sinnvolle Maßstäbe bestimmen.

E 7: S zeichnet sinnvolle Maßstäbe im Koordinatensystem ein.

OP 8: S kennt Konvention zur Darstellung von geordneten Paaren.

E 8: S zeichnet Punkte im Koordinatensystem ungefähr richtig ein.

OP 9: S weiß, daß bei graphischen Darstellungen häufig eine Interpolation notwendig ist, bei der die Maßstabseinheit beachtet werden muß.

E 9: S zeichnet Punkte auch bei nichttrivialem Maßstab richtig ein.

OP10: S kennt iterative Verfahren zur graphischen Darstellung von analytischen Funktionen. Er kann erkennen, in welchen Bereichen der Verlauf der Funktion aufgrund der gezeichneten Punkte bisher noch unsicher angenähert ist.

E 10: S zeichnet im kritischen Bereich ausreichend Punkte ein.

OP11: S weiß, daß bei Angabe der Grundmenge Q oder Angabe des Begriffs "Kurve" der Verlauf der Funktion durch eine glatte Kurve angenähert werden kann.

E 11: S verbindet Punkte durch einen glatten Kurvenzug.

2 Operationskette zur Transformation Wertetabelle in analytische Darstellung (WT → AD)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine Wertetabelle einer allgemein linearen Funktion und ein vollständiges Koordinatensystem.
Gesucht ist die analytische Funktion, die diese Wertetabelle angenähert beschreibt.
Zur Lösung dieses Aufgabentyps muß der Schüler folgende Strategie kennen:
Die Angabe der analytischen Darstellung einer in aufzählender Form gegebenen

Funktion ist nur möglich, wenn er den Funktionstyp erkennen kann. Die Erkennung ist am einfachsten mit Hilfe des Graphen. Daraus folgt als erster Schritt (WT→GR). Wenn er Funktionstyp kennt, müssen mit entsprechenden Algorithmen die Formvariablen bestimmt werden.

OP24: S weiß, daß die Transformation WT→AD nur dann möglich ist, wenn er den Funktionstyp erkennt. Er weiß, daß die Funktionstyperkennung anhand des Graphen am leichtesten gelingt.

E 24: S versucht, Wertetabelle graphisch darzustellen.

OP 8: S kennt Konvention zur Darstellung geordneter Paare.

E 8: S zeichnet Punkte in Koordinatensystem richtig ein.

OP12: S, der allgemeine lineare Funktion behandelt hat, kann anhand bestimmter Merkmale des Graphens entscheiden, ob er Funktionstyp kennt.

E 12: S gibt Funktionstyp an ($x \to a_o$; $x \to a_1 x$; $x \to a_1 x + a_o$; Typ unbekannt).

Bei der weiteren Analyse wollen wir davon ausgehen, daß es sich um den Typ $x \to a_1 x + a_o$ handelt.

OP14: S weiß, daß bei der Angabe der Funktionsgleichung einer bestimmten linearen Funktion die Formvariable a_1 mit Hilfe der Steigungsformel berechnet werden kann. Er weiß, daß hierzu die Komponenten geordneter Paare zweier Punkte nach einer bestimmten Regel in die Steigungsformel eingesetzt werden müssen.

OP13: S kann geordnete Paare von Punkten dem Graphen entnehmen.

E 13: S kann geordnete Paare des Graphen in richter Konvention hinschreiben.

E 14: S kann Koordinaten in Steigungsformel an richtiger Stelle einsetzen und Wert für a_1 richtig angeben.

OP15: S weiß, daß er weiterhin die Formvariable a_o bestimmen muß. Falls $P(0/y_1)$ bekannt, kann er den Achsenabschnitt als Wert der Formvariable a_o interpretieren.

E 15: S gibt Wert für a_o richtig an.

OP16: S kann Funktionsgleichung / Vereinfachtes Pfeildiagramm bei Kenntnis der Werte für a_1 und a_o mit willkürlich gewählten Platzhaltern wiedergeben.

E 16: S gibt Funktionsgleichung / Vereinfachtes Pfeildiagramm mit willkürlich gewählten Platzhaltern an.

OP 1: S weiß, daß zur Angabe der Funktion die entsprechenden Platzhalter identifiziert werden müssen.

E 1: S gibt Platzhalter richtig an.

OP 2: S kann, falls notwendig, Dimension identifizieren.

E 2: S gibt, wenn notwendig, Platzhalter mit Dimension an.

Wenn Punkt $P(0/y_1)$ nicht bekannt, muß der Schüler a_o berechnen.

OP17: S weiß, daß, wenn $P(0/y_1)$ nicht bekannt ist, er a_o durch Einsetzen von a_1 und den Koordinaten eines Punktes $P(x_1/y_1)$ in die allgemeine Funktionsgleichung $y = a_1 x + a_o$ berechnen muß.
S kann die Bestimmungsgleichung für a_o aufstellen.
S kann Gleichung mit 1. Unbekannten lösen.

E 17: S hat Wert für a_o richtig berechnet.

Damit sind die Operationen und Ergebnisse für die wichtigsten mathematischen Aufgabentypen definiert.
Darüber hinaus wurden, wie schon angegeben, weitere Aufgabentypen in den Kriteriumstest aufgenommen, für die bisher nicht erwähnte Operationen notwendig sind. Hierzu gehören die Typen:
VD→GR, GR→VD, WT→VD, WY ∪ GR→WX, VY ∪ GR→WX und verschiedene physikalische Problemaufgaben. Ihre Operationsketten werden im folgenden wiedergegeben.

3 Operationskette zur Transformation Verbale Darstellung in Graph (VD→GR)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine verbale Darstellung einer Funktion:
Die Funktionswerte sind konstant für x = 0 bis x = 30, erreichen bei x = 50 ihren größten Wert und sind für x-Werte größer 300 Null.
Gesucht sei eine mögliche Kurve, die dieser Beschreibung genügt.

OP18: S weiß, daß zum Zeichnen einer Kurve geordnete Paare der Funktion notwendig sind. Er erkennt, daß nur relative Angaben über Funktionswerte gegeben sind, die bestimmten Bereichen zugeordnet werden.
S erkennt, daß bei stückweisen relativen Angaben über die Funktionswerte nur die Kurvenform in bestimmten Bereichen angegeben werden kann.
In den nicht angegebenen Bereichen ist der Kurvenverlauf willkürlich, so lange er die angegebenen Bedingungen nicht verletzt.
S kann die zusammengehörenden verbalen Angaben über den Kurvenverlauf identifizieren.

E 18: S zeichnet einen Kurvenverlauf, der den angegebenen Zusammenhang zwischen den Funktionswerten genügt, ohne auf den Bereich zu achten.

OP 3: S weiß, daß er die Bereichsangaben berücksichtigen muß.

E 3: S zeichnet Kurvenverlauf in Übereinstimmung mit Bereichsangaben richtig ein.

4 Operationskette für Transformation Graph in Verbale Darstellung (GR→VD)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine graphische Darstellung, in der stückweise konstante und lineare Kurvenzüge vorkommen.
Gesucht ist eine Beschreibung des Kurvenverlaufs in eigenen Worten (nicht in Tabellenform).

OP 3: S kann Bereiche identifizieren, in denen bestimmte Relationen zwischen geordneten Paaren bestehen.

OP19: S kennt die Begriffe konstant, linear steigend, linear fallend. Er kann den Kurvenzügen die Begriffe richtig zuordnen.

E 19: S gibt eine verbale Beschreibung der Funktion, aus der der Zusammenhang der Funktionswerte richtig hervorgeht, ohne auf Bereiche einzugehen.

E 3: S hat entsprechende Bereiche angegeben.

Die Transformation GR→VD kommt auch in folgendem Aufgabentyp vor:

Aufgabenstellung: Gegeben ist die graphische Darstellung einer nichtlinearen, monotonen Funktion. Gesucht ist eine verbale Beschreibung der Funktion.

OP20: S erkennt Monotonie der Funktion anhand des Graphen und kennt je-desto-Struktur.

E 20: S gibt einen je-desto-Satz an, der den Zusammenhang richtig wiedergibt.

OP 1: S kann Platzhalter identifizieren.

E 1: S gibt Platzhalter richtig wieder.

5 Operationskette für Transformation Wertetabelle in verbale Darstellung (WT → VD)

Aufgabenstellung: Gegeben sei eine Wertetabelle und der Satzanfang: "Je größer a, desto...". Gesucht ist eine verbale Beschreibung der Funktion.

OP21: S erkennt Monotonie der Funktion anhand der Wertetabelle und kennt je-desto-Struktur.

E 21: S vervollständigt Aussage richtig.

OP 1: S kann Platzhalter identifizieren.

E 1: S gibt Platzhalter richtig wieder.

6 Operationskette für Transformation anhand eines Graphen zu vorgegebenem Funktionswert das Argument bestimmen (WY ∪ GR → WX), (VY ∪ GR → WX)

6.1 WY ∪ GR → WX

Aufgabenstellung: Gegeben ist eine analytische Funktion und Graph einer Funktion und ein zahlenmäßig angegebener Funktionswert (WY). Gesucht ist der zugehörige Argumentwert (WX).
Diese Operation soll symbolisch durch WY ∪ GR → WX dargestellt werden.

OP22: S kennt Konstruktionsverfahren zur Bestimmung des Arguments zu vorgegebenem Funktionswert und kann entsprechendes Verfahren anwenden.

E 22: S gibt Argumentwert zu zahlenmäßig vorgegebenem Funktionswert ungefähr richtig an.

OP 9: S weiß, daß bei graphischen Darstellungen Interpolationen notwendig sind, bei der die Maßstabseinheit beachtet werden muß.

E 9: S gibt Argumentwert auch bei nichttrivialem Maßstab richtig an.

(Wesentlich mehr Aufwand ist notwendig, wenn der Schüler den Argumentwert mit Hilfe der Zuordnungsvorschrift berechnet. Dies war leider häufig der Fall. Da aber nicht eindeutig bestimmt werden konnte, welchen der beiden Wege der Schüler gegangen ist, wurde hierfür keine weitere Operation angegeben.)

6.2 VY ∪ GR → WX

Ebenso wichtig für die Analyse graphisch dargestellter Zusammenhänge in der Physik ist es, zu verbalen Beschreibungen eines Funktionswertes (z.B. Maximum) zugehörige Argumente zu bestimmen.
Aufgabenstellung: Gegeben sei der Graph einer Funktion und ein verbal beschriebener Funktionswert (VY). Gesucht ist der zugehörige Argumentwert WX.

OP23: S kann verbal beschriebenen Funktionswert im Graph erkennen.

E 23: S gibt Argumentwert zu verbal beschriebenem Funktionswert ungefähr richtig an.

OP 9: S weiß, daß bei graphischen Darstellungen Interpolationen notwendig sind, bei der die Maßstabseinheit beachtet werden muß.

E 9: S gibt Argumentwert auch bei nichttrivialem Maßstab richtig an.

Damit sind die häufig auftretenden Operationen und ihre Ergebnisse definiert. Sie beziehen sich bis auf die Operationen "Platzhalter und Dimension identifizieren" auf mathematische Kenntnisse.

Die nun folgenden Aufgabentypen enthalten weitere Operationen, die über den normalen mathematischen Bereich hinausgehen und sich auf typische physikalische Problemstellungen beziehen. Deshalb ist eine Kontextabhängigkeit der Operationen nicht prüfbar.

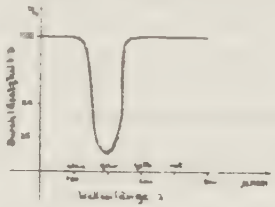
7 Operationsketten für physikalische Problemaufgaben

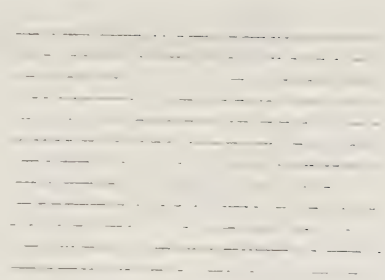
a) Mit Hilfe von Kenntnissen, die nicht im Mathematikunterricht vermittelt werden, aus einem Graphen Schlüsse ziehen.

FARBFILTER

In der Photographie werden Farbfilter [illegible] zur Unterdrückung oder Hervorhebung bestimmter Farben verwendet. Man charakterisiert die Eigenschaften eines Filters durch die Angabe der *Durchlässigkeit* [illegible] (gemessen in [illegible] für verschiedene [illegible] in Millionstel Millimeter: kurz [illegible]).
Wird Licht einer bestimmten Wellenlänge vollständig von dem Filter "zurückgehalten", so ist die Durchlässigkeit $D_{\lambda} = 0$ für diese Wellenlänge.
Geht alles Licht einer bestimmten Wellenlänge durch das Filter hindurch, so ist die Durchlässigkeit $D_{\lambda} = 100$ für diese Wellenlänge.

In der folgenden Kurve ist der Zusammenhang zwischen der Durchlässigkeit D_{λ} und der Wellenlänge (Farbe) λ des Lichtes für ein bestimmtes Filter dargestellt:





BESCHREIBEN SIE DIE EIGENSCHAFTEN DES FILTERS IN IHREN EIGENEN WORTEN (NICHT IN TABELLENFORM). GEBEN SIE AN, OB DER FILTER FÜR LANDSCHAFTSAUFNAHMEN ZU VERWENDEN IST.

Diese Aufgabe stellt ein typisch physikalisches Item dar, bei dem der Schüler erkennen muß, daß das Filter den wesentlichen Farbanteil von Landschaften, das grüne Licht, stark zurückhält.

Die entsprechenden Operationen sind:

OP19: S kann anhand eines Graphen Bereiche erkennen, in denen sich die Funktion stark ändert.

E 19: Angabe des Minimums

OP26: S kann physikalische Bedeutung des Minimums erkennen.

E 26: Angabe, daß Filter grünes Licht schlecht durchläßt.

OP27: S kann die Auswirkungen der Filtereigenschaften auf die Photographie von Landschaften abschätzen.

E 27: Angabe, daß Filter für Landschaftsaufnahmen ungeeignet ist.

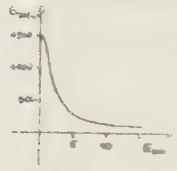
b) Funktionale Zusammenhänge in einem Graphen mit Hilfe eines zweiten Graphen begründen können.

Die folgende Aufgabe soll überprüfen, inwieweit S zur Begründung eines Sachverhaltes weitere zusätzliche Informationen in der Aufgabe verwenden. Denn irgendeine Begründung, das zeigte die Voruntersuchung, finden die meisten S auch ohne die Kenntnis von Abb 1. Dagegen wird angenommen, daß nur der S den Sachverhalt aus Abb 1 (also die Grundstückspreise) in seiner Begründung aufnimmt, der graphisch dargestellte Zusammenhänge leicht lesen kann. Die Aufgabe soll also indirekt abprüfen, welches Bereitschaftsniveau die untersuchten S bezüglich der Nutzung graphisch dargestellter Zusammenhänge haben.

ARBEITEN UND WOHNEN

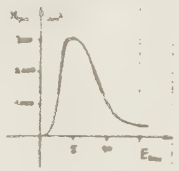
In der City reißen sich die Banken, Geschäfte und Versicherungen um die Grundstücke und überbieten sich gegenseitig. Die City ist für sie der günstigste Standpunkt.

In den folgenden 2 Abbildungen sind der Entfernung E_{km} vom Stadtzentrum die entsprechenden Grundstückspreise G_{DM/m^2} und die Zahl der Wohnungen $W_{pro\ km^2}$ zugeordnet.



Grundstückspreise G_{DM/m^2}

Abb 1



Zahl der Wohnungen $W_{pro\ km^2}$

Abb 2

Aufgabe:

1.) Begründen Sie den in Abb. 2 dargestellten Zusammenhang zwischen E_{km} und $W_{pro\ km^2}$

(Bitte keine mathematische Beschreibung geben!)

2.) In welcher Entfernung E_{km} vom Zentrum wohnen die meisten Kinder pro km^2 ?

Zu 1.) _____

Zu 2.) Die Entfernung beträgt etwa E_{km} = _____

Sicherheit: 1 2 3 4 5 6

s.unsicher s.sicher

OP28: S versucht, Abb 1 zu verstehen. Er erkennt, daß die Grundstückspreise in Citynähe stark ansteigen. Er kann daraus folgern, daß hohe Grundstückspreise hohe Mieten bewirken, die nur wenige Leute zahlen können.

E 28: Angabe, daß in Citynähe die Wohnungsdichte deshalb so gering ist, weil die Grundstückspreise so hoch sind.

OP29: S muß den Schluß ziehen, daß die Zahl der Kinder in einem Gebiet von der Wohnungsdichte abhängt.

E 29: Angabe des Bereichs, in dem die Wohnungsdichte am höchsten ist.

c) Irrelevante Parameter identifizieren

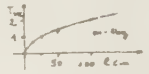
Bei diesem Item soll der S zeigen, daß er irrelevante Parameter anhand von Graphen erkennen kann.

P E N D E L

Eine Stahlkugel, an einem Faden aufgehängt, kann hin- und herpendeln. Solche Pendel werden beim Bau von Uhren benötigt.

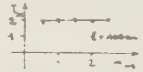
Die Zeitdauer, die ein Pendel braucht, um von A nach B und wieder nach A zu schwingen, nennt man Schwingungsdauer T.

Untersucht man den Zusammenhang zwischen der Länge ℓ_{cm} des Fadens und der Schwingungsdauer T_{sec} für ein Stahlkugel mit der Masse m von 1 kg, so erhält man folgende Funktion:



Zusammenhang zwischen ℓ_{cm} und T_{sec} für eine Masse m_{kg} = 1.

Der Zusammenhang zwischen der Masse m_{kg} der Stahlkugel und der Schwingungsdauer T_{sec} für eine Fadenlänge ℓ_{cm} = 100 ist durch folgende Funktion gegeben.



Zusammenhang zwischen m_{kg} und T_{sec} für eine Fadenlänge ℓ_{cm} = 100.

Aufgabe:

1.) Wie groß muß ein Uhrmacher ℓ_{cm} und m_{kg} etwa wählen, damit sein Pendel eine Schwingungsdauer T_{sec} = 1 besitzt?

2.) Welche der beiden Großen beeinflußt die Schwingungsdauer nicht?

Zu 1.) Die Schwingungsdauer T des Pendels ist etwa 1 sec, wenn _____

Zu 2.) Die Größe _____

beeinflußt die Schwingungsdauer T nicht

Begründung: _____

OP30: S kann erkennen, daß sich die Schwingungsdauer T mit der Länge l ändert, daß aber der Zusammenhang zwischen m und T durch eine konstante Funktion beschrieben wird. Daraus kann er folgern, daß die Größe m die Schwingungsdauer T nicht beeinflußt.

E 30: Angabe der Größe m.

E 19: S weist auf konstante Funktion zwischen m und T hin.

d) Entwurf eines Versuchsplanes mit Auswertung

Dieses Item sollte prüfen, ob die S einen Versuchsplan und die Auswertung für ein physikalisches Problem angeben können, in dem die mathematischen Methoden in sinnvoller Weise integriert sind.

EIN PHYSIKALISCHER VERSUCH

Ein Physiklehrer stellt Dir die Aufgabe, den Zusammenhang zwischen

Fallhöhe h_m und der Fallzeit t_{sec}

durch einen Versuch festzustellen.

Welche [illegible] sollst Du untersuchen, ob dieser Zusammenhang zwischen h und t durch einen [illegible] analytische Funktion be-[illegible] ist.

[illegible] die wichtigsten Schritte an, wie [illegible] Aufsatz anfertigen.

1. Schritt: _____

2. Schritt: _____

3. Schritt: _____

4. Schritt: _____

5. Schritt: _____

OP31: Wissen, daß der Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen experimentell bestimmt werden muß und wissen, wie man die Funktionale h_m und t_{sec} bestimmt.

E 31: Angabe der Meßmethode für die Bestimmung eines Wertepaares.

OP32: Wissen, daß man zur Erkennung eines analytischen Zusammenhangs mehrere Wertepaare kennen muß.

E 32: Angabe eines Versuchsplans zur Messung mehrerer geordneter Paare.

OP24: S weiß, daß die Transformation WT→AD nur dann möglich ist, wenn er den Funktionstyp erkennt. Die Funktionstyperkennung gelingt am leichtesten anhand des Graphen.

E 24: Angabe der Transformation WT→GR und des Hinweises auf Funktionstyperkennung

OP25: S weiß, daß wenn Funktionstyp erkennbar, die Funktionsgleichung bestimmt werden kann.

E 25: Angabe, daß man, falls möglich, analytische Funktion bestimmt.

Kernpunkte der Operationen der Kriteriumsaufgaben

Op.Nr.	Bedeutung
1	Identifizierung von Platzhaltern
2	Identifizierung der Dimension
3	Beachtung des Bereichs
4	Interpretation von Rechenvorschriften
5	Beachtung von Rechenerleichterungen
6	Wahl des Ausschnitts
7	Wahl des Maßstabs
8	Darstellung von geordneten Paaren als Punkte
9	Beachtung nichttrivialer Maßstäbe
10	Iterative Verfahren der graphischen Darstellung
11	Annäherung einer Funktion durch eine glatte Kurve
12	Funktionstyperkennung
13	Bestimmung geordneter Paare anhand des Graphen
14	Berechnung der Steigung
15	Bestimmung von a_o aus Achsenabschnitt
16	Angabe der Funktionsgleichung bei Kenntnis der Formvariablen
17	Berechnung von a_o mit Hilfe von geordneten Paaren
18	Umsetzung relativer Angaben über Funktionswerte in Graphen
19	Verbale Beschreibung eines Graphen
20	Erkennung der Monotonie einer Funktion anhand des Graphen
21	Erkennung der Monotonie einer Funktion anhand der Wertetabelle
22	Bestimmung des Arguments eines zahlenmäßig vorgegebenen Funktionswertes
23	Bestimmung des Arguments eines verbal gekennzeichneten Funktionswertes
24	Zeichnen des Graphen zum Erkennen von Funktionstypen
25	Unterscheidung von Funktionstyp (Vorstufe) und Funktionsgleichung
26	Physikalische Beziehungen in Graphen erkennen
27	Aus Graphen mit Hilfe nicht erwähnter Zusammenhänge Schlüsse ziehen
28	Hinzuziehen eines Graphen zur Interpretation eines anderen Graphen
29	In Graphen mit Hilfe von nicht erwähnten Zusammenhängen relevanten Bereich erkennen
30	Erkennung irrelevanter Parameter
31	Zusammenhänge zwischen empirischen Größen sind durch Messung bestimmbar
32	Analyse von Zusammenhängen muß sich auf mehrere Meßwertpunkte beziehen (Wertetabelle)

Punktbewertung

Im folgenden sind die Auswertanweisungen der Tests der Untersuchung zusammengefaßt. Dabei werden aus Platzgründen Testaufgaben getrennt von der Auswertanweisung wiedergegeben.

Die Aufgaben wurden den Schülern in Form zweier Testhefte vorgelegt, in die die Schüler direkt ihre Antworten niederschrieben. Die Schüler hatten pro Testheft etwa 90 Minuten Zeit.
Da der Test sich weitgehend auf Freiantworten stützte, mußten für die Auswertung die bewertbaren und zu bewertenden, feststellbaren Ergebnisse fixiert werden. Solche feststellbaren Ergebnisse wurden bei der Operationsanalyse angegeben.
Es erschien aber zu aufwendig, für diese Untersuchung alle in der Operationsanalyse angegebenen feststellbaren Ergebnisse der Testaufgaben als Einzelitems zu verschlüsseln. Stattdessen wurden nur die als besonders wichtig angesehenen Ergebnisse bewertet. Dadurch verliert man zwar wichtige Informationen über Einzelschwierigkeiten der Schüler, doch muß man die beschränkte Arbeitskapazität für dieses Einmannprojekt mit berücksichtigen.
Für eine Teilpopulation wurde allerdings auch solch eine genauere Analyse durchgeführt.

Zum Verständnis der angegebenen Punktzahlen für jede Aufgabe sei noch erwähnt, daß diese Punktzahl nicht dem Gewicht der Aufgaben in der statistischen Auswertung entspricht. Die Daten für die statistische Auswertung wurden durch eine Transformation der Punktwerte in vier Stufen erzeugt (s. Abschnitt 7.3).

Auswertanweisung

Aufgabe 1bM
(VD → GR)

Bewertung: 1 Punkt für Einzeichnen des konstanten Bereichs (OP3, OP8, OP9, OP18)

1 Punkt für die Berücksichtigung des Maximums bei $x = 50 \pm 10$ (OP8, OP9, OP18)

1 Punkt, wenn Kurve bei $x = 300 \pm 10$ den y-Wert Null annimmt (OP8, OP9, OP18)

Aufgabe 1bP
(VD → GR)

Bewertung: 1 Punkt für Einzeichnen des konstanten Bereichs (OP3, OP8, OP9, OP18)

1 Punkt für die Berücksichtigung des Maximums bei $s_m = 0{,}5 \pm 0{,}1$ (OP8, OP9, OP18)

1 Punkt, wenn Kurve bei $s_m = 0{,}5 \pm 0{,}1$ den Funktionswert Null annimmt (OP8, OP9, OP18)

Aufgabe 2aM

Teil I (AD → WT) 2am

Bewertung: 1 Punkt für jedes richtig berechnete Wertepaar aus dem angegebenen Bereich; max. 5 Punkte

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte (OP 3; OP 4)

Teil II (WT → VD) 2amZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn bezüglich der angegebenen Wertetabelle Monotonie richtig erwähnt wurde. Ein Schüler konnte deshalb bei falsch interpretierter Rechenvorschrift trotzdem diese Zusatzaufgabe richtig haben, wenn seine Formulierung bezüglich der von ihm berechneten Werte richtig war. Platzhalter mußte richtig wiedergegeben sein (OP1, OP21,

Aufgabe 2aP

Teil I (AD → WT) 2ap

Bewertung: 1 Punkt für jedes richtig berechnete Wertepaar aus dem angegebenen Bereich; max. 4 Punkte

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze, max. 2 Punkte (OP 3; OP 4)

Teil II (WT → VD) 2apZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn bezüglich der angegebenen Wertetabelle Monotonie richtig erwähnt wurde. Ein Schüler konnte deshalb bei falsch interpretierter Rechenvorschrift trotzdem diese Zusatzaufgabe richtig haben, wenn seine Formulierung bezüglich der von ihm berechneten Werte richtig war. Platzhalter mußte richtig wiedergegeben sein (OP1, OP21,

Aufgabe 2bM

Teil I (AD → WT) 2bm

Bewertung: 1 Punkt für jedes richtig berechnete Wertepaar aus dem angegebenen Bereich; max. 5 Punkte

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte (OP 3, OP 4)

Teil II (WT→VD) 2bmZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn bezüglich der angegebenen Wertetabelle Monotonie richtig erwähnt wurde. Ein Schüler konnte deshalb bei falsch interpretierter Rechenvorschrift trotzdem diese Zusatzaufgabe richtig haben, wenn seine Formulierung bezüglich der von ihm berechneten Werte richtig war. Platzhalter mußte richtig wiedergegeben sein. (OP1, OP21)

Aufgabe 2bP

Teil I (AD→WT) 2bp

Bewertung: 1 Punkt für jedes richtig berechnete Wertepaar aus dem angegebenen Bereich; max. 5 Punkte

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze;max.2 Punkte (OP3;OP4)

Teil II (WT→VD) 2bpZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn bezüglich der angegebenen Wertetabelle Monotonie richtig erwähnt wurde. Ein Schüler konnte deshalb bei falsch interpretierter Rechenvorschrift trotzdem diese Zusatzaufgabe richtig haben, wenn seine Formulierung bezüglich der von ihm berechneten Werte richtig war. Platzhalter mußte richtig wiedergegeben sein. (OP1, OP21)

Aufgabe 4aM

Teil I (WT→GR) 4am

Bewertung: 0 Punkte, wenn Maßstab falsch, d.h., wenn Intervall ungleich gewählt.

5 Punkte, wenn alle Punkte richtig eingezeichnet waren. Für jeden falsch eingezeichneten Punkt 1 Punkt Abzug (max. 5) (OP7, OP8)

Teil II (VY ∪ GR → WX) 4amZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn Argumentwert mit 2 angegeben wurde. (OP 23)

Aufgabe 4aP

Teil I (WT→GR) 4ap

Bewertung: 0 Punkte, wenn Maßstab falsch, d.h. wenn Intervall ungleich gewählt.

5 Punkte, wenn alle Punkte richtig eingezeichnet waren. Für jeden falsch eingezeichneten Punkt 1 Punkt Abzug (max. 5). (OP7, OP8)

Teil II (VY ∪ GR → WX) 4apZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn Argumentwert mit 2 angegeben wurde. (OP 23)

Aufgabe 4bM

Teil I (WT→GR) 4bm

Bewertung: 0 Punkte, wenn Koordinatensystem falsch, d.h., wenn Intervall ungleich, wenn Maßstab für die waagrechte Achse bei Achsenlänge weniger als zur Hälfte ausnützte oder wenn Platzhalter und Komponenten nicht übereinstimmten. Davon ausgenommen blieb, wenn die Achsen vertauscht wurden.

5 Punkte, wenn alle Punkte richtig eingezeichnet waren. Für jeden falsch eingezeichneten Punkt 1 Punkt Abzug (max. 5). (OP6, OP7, OP8, OP9)

Teil II (GR→VD) 4bmZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn richtige je-desto-Struktur oder die Monotonie der Funktion erwähnt wurde und entsprechende Platzhalter angegeben wurden. (OP1, OP19)

Aufgabe 4bP

Teil I (WT→GR) 4bp

Bewertung: 0 Punkte, wenn Koordinatensystem falsch, d.h., wenn Intervall ungleich, wenn Maßstab für die waagrechte Achse bei Achsenlänge weniger als zur Hälfte ausnützte oder wenn Platzhalter und Komponenten nicht übereinstimmten. Davon ausgenommen blieb, wenn die Achsen vertauscht wurden.

5 Punkte, wenn alle Punkte richtig eingezeichnet waren. Für jeden falsch eingezeichneten Punkt 1 Punkt Abzug (max. 5). (OP6, OP7, OP8, OP9)

Teil II (GR→VD) 4bpZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn richtige je-desto-Struktur oder die Monotonie der Funktion erwähnt wurde und entsprechende Platzhalter angegeben wurden. (OP1, OP19)

Aufgabe 5aM
(GR→VD)

Bewertung: 1 Punkt für jede richtige Kennzeichnung der 5 Bereiche durch Begriffe konstant, linear fallend, linear steigend, wenn Bereich mit angegeben wurde (max. 5 Punkte). (OP 1, OP19)

Aufgabe 5aP

Teil I (GR→VD) 5ap

Bewertung: 1 Punkt, wenn in der Aufgabe angegeben wurde, daß das Filter nur grünes Licht schlecht durchläßt
oder
wenn in der Antwort der Abfall und Anstieg der Funktion erwähnt wurde. (OP1, OP19, OP26)

Teil II 5apZ

Bewertung: 1 Punkt für Ankreuzen der richtigen Antwort. (OP27)

Aufgabe 7bM
(VY ∪ GR → WX)

Bewertung: 1 Punkt, wenn x = 8,5±0,1 angegeben wurde. (OP9, OP23)

Aufgabe 7bP
(VY ∪ GR → WX)

Bewertung: 1 Punkt, wenn R_{OHM} = 6±0,5 angegeben wurde. (OP9, OP23)

Aufgabe 10aM

Teil I (AD → GR) 10am

Bewertung: 1 Punkt für jeden richtig eingezeichneten Punkt; max. 5 Punkte.

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte.

(OP3, OP4, OP8)

Teil II (WY ∪ GR → WX) 10amZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn x = 30±2 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 10aP

Teil I (AD → GR) 10ap

Bewertung: 1 Punkt für jeden richtig eingezeichneten Punkt; max. 5 Punkte.

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte

(OP3, OP4, OP8)

Teil II (WY ∪ GR → WX) 10apZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn W_{Litm} = 29±2 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 10bM

Teil I (AD → GR) 10bm

Bewertung: 1 Punkt für jeden richtig eingezeichneten Punkt; max. 5 Punkte.

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte

(OP3, OP4, OP8)

Teil II (WY ∪ GR → WX) 10bmZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn x = 10±2 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 10bP

Teil I (AD → GR) 10bp

Bewertung: 1 Punkt für jeden richtig eingezeichneten Punkt; max. 5 Punkte.

1 Punkt Abzug für jede nicht berücksichtigte Bereichsgrenze; max. 2 Punkte

(OP 3, OP 4, OP 8)

Teil II (WY ∪ GR → WX 10bpZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn V_{cm^3}= 14±3 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 11aM

Teil I (GR → AD) 11am

Bewertung: 1 Punkt, wenn Funktionstyp richtig angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig angegeben wurde

3 Punkte, wenn Funktionsgleichung richtig angegeben wurde.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (WY ∪ GR → WX) 11amZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn x = 150±10 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 11aP

Teil I (GR → AD) 11ap

Bewertung: 1 Punkt, wenn Funktionstyp richtig angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig angegeben wurde

3 Punkte, wenn Funktionsgleichung richtig angegeben wurde.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (WY ∪ GR → WX) 11apZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn t = 300±5 angegeben wurde.

(OP 22)

Aufgabe 11bM

Diese Aufgabe wurde für a_1 und a_o getrennt ausgewertet:

Teil I (GR → AD) 11bm1

Bewertung für a_1:

1 Punkt, wenn als Formvariable a_1 (Funktionstyp) oder falscher Wert für a_1 mit Platzhalter angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig berechnet wurde, aber Platzhalter fehlte

3 Punkte, wenn richtiger Wert für a_1 und Platzhalter angegeben wurde.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (GR → AD) 11bm2

Bewertung für a_o:

1 Punkt, wenn Formvariable a_o angegeben wurde

2 Punkte, wenn ein falscher Wert für a_o angegeben wurde. (Dieser falsche Wert ergab sich entweder durch Rechenfehler oder durch falsche Bestimmung mit der Achsenabschnittsmethode, die hier nicht angewendet werden konnte.)

4 Punkte, wenn Wert für a_o richtig angegeben wurde.

(OP 17)

Aufgabe 11bP

Teil I (GR→AD) 11bp1

Bewertung für a_1:

1 Punkt, wenn als Formvariable a_1 (Funktionstyp) oder falscher Wert für a_1 mit Platzhalter angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig berechnet wurde, aber Platzhalter fehlte

3 Punkte, wenn richtiger Wert für a_1 und Platzhalter angegeben wurden.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (GR→AD) 11bp2

Bewertung für a_o:

1 Punkt, wenn Formvariable a_o angegeben wurde

2 Punkte, wenn ein falscher Wert für a_o angegeben wurde. (Dieser falsche Wert ergab sich entweder durch Rechenfehler oder durch falsche Bestimmung mit der Achsenabschnittsmethode, die hier nicht angewendet werden konnte.)

4 Punkte, wenn Wert für a_o richtig angegeben wurde.

(OP 17)

Aufgabe 12aM

Teil I (WT→AD) 12am1

Bewertung für a_1:

1 Punkt, wenn als Formvariable a_1 (Funktionstyp) oder falscher Wert für a_1 mit Platzhalter angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig berechnet wurde, aber Platzhalter fehlte

3 Punkte, wenn richtiger Wert für a_1 und Platzhalter angegeben wurden.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (WT→AD) 12am2

Bewertung für a_o:

1 Punkt, wenn Formvariable a_o angegeben wurde

3 Punkte, wenn Wert für a_o richtig angegeben wurde.

(OP 15)

Teil III (WY ∨ GR → WX) 12amZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn x = 1,5±0,2 angegeben wurde.

(OP9; OP22)

Aufgabe 12aP

Teil I (WT→AD) 12ap1

Bewertung für a_1:

1 Punkt, wenn als Formvariable a_1 (Funktionstyp) oder falscher Wert für a_1 mit Platzhalter angegeben wurde

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig angegeben, aber ohne Platzhalter

2 Punkte, wenn Wert für a_1 richtig berechnet wurde, aber Platzhalter fehlte

3 Punkte, wenn richtiger Wert für a_1 und Platzhalter angegeben wurde.

(OP1; OP9; OP12; OP13; OP14; OP16)

Teil II (WT→AD) 12ap2

Bewertung für a_o:

1 Punkt, wenn Formvariable a_o angegeben wurde

3 Punkte, wenn Wert für a_o richtig angegeben wurde.

(OP 15)

Teil III (WY ∨ GR → WX) 12apZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn I_{Amp} = 0,5±0,05 angegeben wurde.

(OP9; OP22)

Aufgabe 13P (Arbeit und Wohnen)

Teil I 13p

Bewertung: 1 Punkt, wenn in der Begründung auf die hohen Grundstückspreise oder Mehrpreise in der City hingewiesen wurde.

(OP 28)

Teil II 13pZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn der Wert für E_{km} im Bereich von 3 - 8 liegt.

(OP 29)

Aufgabe 14P (Pendel)

Teil I (WY∨GR→WX) 14pZ

Bewertung: 1 Punkt, wenn l_{cm} = 0,25±0,05 liegt. Die Angabe der Masse wurde nicht berücksichtigt.

(OP9; OP22)

Teil II 14p1

Bewertung: 1 Punkt, wenn als einzige Größe die Masse erwähnt wurde. Folgende Antworten wurden ebenfalls richtig gewertet:
m, m_{kg}, Gewicht, Größe der Kugel

(OP 30)

Teil III (GR→VD) 14p2

Bewertung: 1 Punkt, wenn Schüler sich in der Begründung auf Abb. 2 bezieht oder den konstanten Zusammenhang zwischen m und T erwähnt.

(OP 19)

Aufgabe 15P (Versuch)

Teil I 15p

Bewertung: 1 Punkt für die Angabe, daß man für eine bestimmte Höhe h die Fallzeit t stoppen muß

3 Punkte, wenn aus der Antwort hervorgeht, daß man weitere Messungen mit verschiedenen Höhen h durchführt.

(OP31 , OP 32)

Teil II 15m

Bewertung: 1 Punkt für Angabe der Transformation WT→GR

1 Punkt für Angabe "Funktionstyperkennung"

1 Punkt für Angabe, daß man bei Kenntnis des Funktionstyps die Funktionsgleichung bestimmt.

(OP 24, OP 25)

Aufgabenspezifische Merkmale

A: Funktionstyp:

KF	=	konstante Funktion	$x \to a_0$
LF	=	lineare Funktion	$x \to a_1 x$
ALF	=	allgemeine lineare Funktion	$x \to a_1 x + a_0$
IF	=	inverse Funktion	$x \to \frac{a_1}{x}$
AIF	=	allgemeine inverse Funktion	$x \to \frac{a_1}{x} + a_0$
F	=	keine analytische Funktion obigen Typs	

B: Kontext:

X = x-y-Notation

A = Aufgabe mit physikalischem Kontext, der aber für die Lösung der Aufgabe keine Hilfen gibt (Physik ist reiner Störfaktor)

P = Aufgabe mit physikalischem Kontext, der zur Aktualisierung von Vorstellungen verhelfen kann, die den Lösungsprozeß erleichtert (s. z.B. Aufgabe 1bp, 4ap).

C: Wortzahl:

W = Zahl der in der Aufgabenstellung verwendeten Wörter.

D: Rechenoperationen: Bei der Analyse der Fehler in den Testaufgaben hat sich gezeigt, daß die Rechenfertigkeiten einen wesentlichen Faktor bei der Lösung der Aufgaben darstellten. So war es bedeutsam, ob in einer Aufgabe die Rechenoperation $\frac{10}{5}$ oder $\frac{0,4}{0,2}$ vorkam. Um diesen Effekt, auf dem in dem Ausmaß bei der Konstruktion der Aufgaben nicht geachtet worden war, mit zu erfassen, wurde ein Code "Rechenoperationen" eingeführt. Dabei werden zwei Aufgabenmerkmale bewertet (s. JERMAN (1973, S. 110)):

a) Operationstyp OPT

A = Addition (1 Punkt)
M = Multiplikation (2 Punkte)
D = Division (4 Punkte)

Kommen mehrere Operationen in einer Aufgabe vor, so werden die Punkte addiert (z.B. $\frac{a+b}{a-b}$ 1+1+4 = 6 Punkte)

b) Zahlart ZA

Die Kategorie "Zahlart" berücksichtigt, auf welche Zahlmengen sich OPT beziehen:

N = Operation bezieht sich auf positive ganze Zahl (1 Pkt)
Z = Operation bezieht sich auf negative ganze Zahl (2 Pkte)
Q = Operation bezieht sich auf Dezimal-Zahl (4Pkte)

Kommen in einer Aufgabe mehrere Zahlen vor, so werden die Punktwerte addiert.

Beispiel: $\frac{5-3}{18+2} = 0.1$ ergibt (1+2)+(1+1) = 5 Punkte

Der Schwierigkeitsgrad SG einer Rechenoperation wird dann aus dem Produkt der Punkte für Operationen und Zahlart bestimmt:

Beispiel: $\frac{5-3}{18+2} = 0.1$ OPT = 6
ZA = 5
SG = OPT·ZA = 6·5 = 30

Dieses Klassifikationsschema sollte nicht überinterpretiert werden. Es gibt nur rohe Anhaltspunkte zur logischen Analyse von Rechenschwierigkeiten.

Methodenprobleme bei der Auswahl von Prüfstatistiken zur Hypothesenprüfung

Methodenprobleme in der psychologischen Forschung beziehen sich auf

a) Probleme des Meßprozesses

b) Probleme in der Zurückweisung von Hypothesen, die nur Wahrscheinlichkeitsaussagen über ein Phänomen machen (z.B. "signifikant besser")

A Meßprobleme in der Psychologie (s. hierzu ORTH (1974))

Messen als Bestimmung der Ausprägung einer Eigenschaft eines Dinges verlangt die Zuordnung von Zahlen zu Dingen, die Träger der zu messenden Eigenschaft sind. Die Meßtheorie gibt dafür die Bedingungen oder Voraussetzungen an, unter denen eine Eigenschaft gemessen werden kann.
Prinzipiell müssen folgende Probleme gelöst werden:

a) das Repräsentationsproblem: Man muß zeigen, daß eine homomorphe Abbildung empirischer Relationen in numerische Relationen möglich ist. Bei der Längenskala verlangt man z.B., daß einem längeren Brett ein größerer Skalenwert zugeordnet wird (Transitivität) und der Skalenwert der Gesamtlänge dreier aneinandergelegter Bretter unabhängig von der Reihenfolge der einzeln Bretter ist (Assoziativität).

b) das Eindeutigkeitsproblem: Es bezieht sich auf den Grad der Eindeutigkeit einer homomorphen Abbildung, der sich aus den Transformationen, die verschiedene, dem Repräsentationstheorem verträgliche Skalen ineinander überführen, ergibt. Z.B. lassen sich die verschiedenen Längenskalen durch Multiplikation mit einer konstanten Zahl (Umrechnungsfaktor) ineinander überführen. Verschiedene Temperaturskalen sind dagegen eindeutig bis auf eine Multiplikation und Addition. Es gilt: Je beschränkter die Art der zulässigen Transformationen, desto eindeutiger ist die Skala.
Wichtige Skalentypen sind:

Skala	Beispiel
Nominalskala	Numerierung von Schulklassen
Ordinalskala	Intelligenzwerte in standardisierten Tests
Intervallskala	Temperatur
Verhältnisskala	Länge, Zeit

Die bezüglich dieser Skalen zulässigen Transformationen findet man z.B. bei ORTH (1974, S. 27).

c) das Bedeutsamkeitsproblem: Es stellt sich bei der rechnerischen Verarbeitung von bereits vorliegenden Daten. Seine Lösung besteht in der Angabe der zulässigen Transformationen bezüglich der jeweiligen Daten, die zu keinen widersprüchlichen Aussagen führen. Z.B. steht die Aussage "ein Material 1 mit Härtegrad 4 ist doppelt so hart wie Material 2 mit Härtegrad 2" im Widerspruch zur Aussage "Material 1 ist dreimal so hart wie Material 2", wenn man die für Ordinalskalen zulässige Transformation Härtegrad 4 → Härtegrad 6 und Härtegrad 2 → Härtegrad 2 durchführt. Die zulässigen statistischen Verfahren stehen im engen Zusammenhang mit dem Skalentyp (s. z.B. Tabelle zulässiger Verfahren der Datenverarbeitung SIEGEL (1976, S. 30)).

Über das Skalenniveau psychologischer Variabler merkt SIEGEL (1976, S. 28) an:

"Die meisten Verhaltenswissenschaftler bemühen sich, Daten auf dem Intervallskalenniveau zu erhalten, und in sehr seltenen Fällen gelingt es ihnen auch."

Bezüglich der Daten der vorliegenden Untersuchung muß folgendes festgestellt werden:

1) Die Hypothesen beziehen sich auf Relationen wie "Gruppe A besser / genau so gut wie Gruppe B". Diese Relationen sind nicht sinnlich wahrnehmbare Eigenschaften wie z.B. "länger", sondern nur über Testaufgaben definierbar. Damit muß, bezogen auf den jeweiligen Test, festgelegt werden, was unter "gleich gut", "besser" verstanden werden soll. Definiert man, wann eine Aufgabe als richtig oder falsch gelöst anzusehen ist, so läßt sich eine Relation "Schüler i ist gleichgut / besser als Schüler j" eindeutig für diese Aufgabe angeben. Das Vorliegen einer schwachen Ordnungsrelation verlangt neben der Transitivität der Zuordnung auch die Konnexität, d.h. für jedes Schülerpaar muß eindeutig angebbar sein, welche Relation vorliegt. Der Nichtbearbeitung einer Aufgabe muß demnach ebenfalls die Eigenschaft "richtig / falsch" zugeordnet werden können oder solche Fälle werden ausgeschlossen. In vorliegender Untersuchung wird der Nichtbearbeitung einer Aufgabe die Ausprägung "falsch" zugeordnet (Begründung: Power-Test; s. LIENERT (1969,S. 44)).

   Durch die Bestimmung der relativen Häufigkeit der Schüler einer Gruppe, die eine bestimmte Aufgabe falsch gemacht haben, kann man eine Zuordnung von "Gruppe 1 besser / gleichgut wie Gruppe 2" zu den Fehlerprozenten eindeutig definieren. Aus dem Vergleich der Fehlerprozentwerte zweier Aufgaben folgt unmittelbar die Zuordnung "Aufgabe A ist schwieriger / gleichschwierig wie Aufgabe B".

   Bleibt anzumerken, daß durch diese Zuordnung die vorliegenden Hypothesen nur bezüglich der durch den Test definierten Aufgaben unter den zeitlich und räumlich beschränkten Merkmalen der Testsituation geprüft werden können.

2) Die so definierte Skala bezieht sich auf die Ausprägungen "richtig / falsch". Es handelt sich demnach um ein Nominalskalenniveau. Ordnet man diesen Zuständen Zahlenwerte zu (z.B. richtig ≙1 Punkt, falsch ≙0 Punkte), so läßt sich im obigen Sinne eine Relation "größer" definieren, was einem Ordinalskalentyp entspricht. Für die Anwendung bestimmter statistischer Verfahren auf Ordnialniveau wird verlangt, daß das beobachtete Merkmal als kontinuierliche Variable anzusehen ist. Im vorliegenden Fall müßte man annehmen, daß neben den Zuständen richtig / falsch kontinuierliche Zwischenzustände existieren (wie z.B. fast richtig, fast falsch,...). Diese Annahme wird aber abgelehnt, da der Lösungsprozeß an Hand der Ergebnisse zu den Aufgaben nicht in kontinuierliche Zustände eindeutig aufgelöst werden kann. Deshalb werden für die Daten ein Nominalskalenniveau angenommen.

   Angemessene Statistiken auf Nominalniveau sind z.B : Modalwert, Häufigkeit, Kontingenz-Koeffizienten. Als angemessene statistische Tests kommen lediglich nichtparametrische Tests wie McNemar- und Chi-Quadrat-Tests in Frage. Ohne weitere Analysen der Ordnungsstruktur der Daten (z.B. mit Hilfe des GUTTMAN-Verfahrens) ist wegen des eingeschränkten Datenniveaus eine Prüfung der Hypothesen bezüglich der Gesamtpunktwerte nicht möglich, was den Nachweis kummulativer Behandlungseffekte sehr erschwert. Ebenfalls scheiden alle Verfahren aus, die sich auf die Analyse von Punktwertdifferenzen beziehen (z.B. Varianzanalyse, Pearson-Korrelationen).

B Entscheidungskriterien für die Zurückweisung von Hypothesen in der psychologischen Forschung

Hypothesen in der psychologischen Forschung können sowohl deterministisch als auch als Wahrscheinlichkeitsaussagen formuliert werden. Deterministische Hypothesen sind vom Aussagetyp "Wenn A, dann auch B für alle $A \in D$." Dabei sei D der Definitionsbereich der Aussage. Sie gelten als zurückgewiesen, wenn nur ein $A \in D$ gefunden wird, das der jeweiligen Aussage widerspricht.

Z.B. könnte man die Hypothese aufstellen: "Wenn Klasse $a \in D$ nach Behandlung A unterrichtet wird, sind ihre Fehlerprozentwerte bezüglich jeder P-Aufgabe aus Test T um mindestens 10% geringer als für Klasse $b \in D$, die nach Behandlung B unterrichtet wird . D sei die Menge aller 8. Klassen, Gymniasium, Deutschland, die bisher nicht in dem Gebiet der linearen Funktionen unterrichtet worden waren."
Es lassen sich aber sicher eine Fülle von Klassen finden, die dieser Aussage widersprechen. Auch, wenn man den Definitionsbereich D durch zusätzliche Merkmale einschränkt oder den angenommenen Unterschied verringert, wird sich diese Hypothese kaum halten lassen.
Eine Beibehaltung von Hypothesen ist nur möglich

a) durch Festlegung eines willkürlichen Prozentsatzes von Fällen (z.B. 5%), die der deterministischen Aussage widersprechen können
b) durch Formulierung von statistischen Hypothesen, die sich nur auf einen bestimmten Teil von Zufallsstichproben einer Population (Grundgesamtheit) beziehen.

In der psychologischen Forschung wird fast ausschließlich mit statistischen Hypothesen gearbeitet, die keine Aussagen mehr über Ereignisse in einer konkreten Zufallsstichprobe erlauben. Zugleich kann aber eine statistische Hypothese auch nicht mehr durch ein einzelnes Experiment widerlegt werden, da jedes Ergebnis verträglich mit dieser Hypothese ist. Damit ergibt sich das Entscheidungsproblem, wann man empirische Ergebnisse als verträglich oder unverträglich mit einer bestimmten Hypothese ansehen kann.
Als weitverbreitetes Entscheidungskriterium werden statistische Tests in Verbindung mit einem willkürlich angenommenen Signifikanzniveau verwendet. Die Selbstverständlichkeit, mit der diese Signifikanztests in der psychologischen Forschung eingesetzt werden, steht aber häufig im Widerspruch zu den logischen Voraussetzungen für die Anwendung dieser Verfahren (s. hierzu Sammlung von Beiträgen zur Signifikanztest-Kontroverse, HENKEL/MORRISON, (1970)).
Auch im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurden statistische Hypothesen aufgestellt, die mit Hilfe des verteilungsunabhängigen χ^2-Tests geprüft wurden. Auf einzelne Probleme der aus der Anwendung dieses speziellen Prüftests gezogenen Schlüsse soll im Anschluß an die Erläuterung des χ^2-Tests hingewiesen werden.

Kurze Beschreibung des Chi-Quadrattests

Der χ^2-Test nach PEARSON setzt im Gegensatz zu den Parametertests (z.B F-Test, t-Test) keine bestimmte Verteilung der Zufallsgrößen voraus. Er prüft die Anpassung einer gegebenen Verteilung (Häufigkeitsverteilung in Kreuztabellen) an eine vorgegebene Verteilung (Anpassungstest). In vorliegender Arbeit wurden die Häufigkeitsverteilungen für "richtige" und "falsche" Aufgabenlösungen in den Gruppen A und B bestimmt. Hierdurch ergeben sich Kreuztabellen mit 2x2 Zellen:

		Aufgabe j		
		falsch	richtig	Randsumme
Gruppe	A	a	b	a + b
	B	c	d	c + d
Randsumme		a+c	b+d	N=a+b+c+d

a-d sind die Häufigkeiten richtiger und falscher Lösungen in den Gruppen A und B

Unter der Annahme, daß die Häufigkeiten der richtigen und falschen Lösungen unabhängig von der jeweiligen Behandlung sind (Nullhypothese), kann man die erwarteten Häufigkeiten gegen die empirisch bestimmten Häufigkeiten prüfen.

Als Prüfgröße verwendet man: $\chi^2 = \frac{N(|ad - bc| - N/2)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

Die nach obiger Formel berechnete Prüfgröße χ^2 folgt annähernd der Chi-Quadrat-Verteilung mit einem Freiheitsgrad. Die mit verschiedenen Werten von χ^2 verbundenen Wahrscheinlichkeiten, daß eine gegebene Häufigkeitsverteilung über die Zellen rein zufällig ist, liegen tabelliert vor. Z.B. führt ein $\chi^2 = 3{,}8$ für Kreuztabellen mit 4 Feldern (Freiheitsgrad 1) zu einem signifikanten Unterschied zwischen den erwarteten und gefundenen Häufigkeiten auf dem 5%-Niveau. "Signifikant auf dem 5%-Niveau (auch geschrieben als $p = 0.05$)" bedeutet: Unter der Annahme, es gäbe eine Population P, in der die relativen Häufigkeiten für richtige / falsche Lösungen gleich den ermittelten Häufigkeiten der obigen Zufallsstichprobe wären, erhielte man in 5% aller Vergleiche zweier Zufallsstichproben einen χ^2-Wert = 3,8. Daraus schließt man, daß die tatsächliche Verteilung nur mit geringer Wahrscheinlichkeit der erwarteten Verteilung entspricht, sodaß die Nullhypothese zurückgewiesen wird.

Voraussetzungen für die Anwendung des χ^2-Tests

Im Gegensatz zu den meisten anderen statistischen Tests setzt der χ^2-Test nur ein Nominalniveau der Daten voraus, was in Übereinstimmung mit dem Skalenniveau der vorliegenden Untersuchung steht. Weiterhin wird die wechselseitige Unabhängigkeit der Ergebnisse verlangt, d.h. von einem Individuum darf nur ein Datum erhoben werden. Es dürfen auch nicht zwei Individuen untereinander bezüglich wesentlicher Variablen ähnlicher sein als andere. Die Untersuchung muß sich demnach auf eine echte Zufallsstichprobe der für die Hypothesen zugrundeliegenden Population beziehen.

Zur Problematik der Anwendung von statistischen Tests als Entscheidungskriterium für die Zurückweisung von Hypothesen

Die Anwendung statistischer Tests beruht auf Voraussetzungen, die in der Regel nicht gegeben und auf die Annahme willkürlicher Signifikanzniveaus, die nicht weiter begründbar sind. Einzelne Kritikpunkte betreffen:

1) die Stichprobe: Die Basis aller statistischen Tests ist eine Auswahl der Stichprobe nach dem Zufallsprinzip. Das bedeutet, man müßte bei schulpsychologischen Forschungen einzelne Schüler nach dem Zufallsprinzip aus der Population auswählen und entsprechend der Behandlung A und B unterrichten. Dies ist praktisch nicht zu realisieren. In Untersuchungen mit Klassen hat man es dagegen mit Schülern zu tun, die untereinander bezüglich wesentlicher Variablen (wie Vorkenntnis, Milieu) ähnlicher sind als zwischen Schülern verschiedener Klassen (ECKEL (1969)). Die Parallelisierung der Gruppen führt weiterhin zu abhängigen Stichproben, die zwar die Vergleichbarkeit erhöhen, aber ebenfalls die Voraussetzungen einer Zufallsstichprobe verletzt. Eine Aussage über den Grad der Verletzung des Postulats einer Zufallsstichprobe durch diese Auswahlverfahren ist nicht angebbar.

2) Die Population: Es muß klar gezeigt werden können, daß die Zufallsstichprobe aus einer Population mit bestimmten Parametern stammt, für die die Hypothese formuliert ist. Dies setzt voraus, daß die Eigenschaften der Population angegeben werden können, aus der eine Zufallsstichprobe ausgewählt wird. Bei vorliegender Untersuchung war die Zielgruppe nur sehr gering spezifiziert (8. oder 9. Klasse, Gymnasium mit mathematischen Vorkenntnissen in bestimmten Gebieten, de[illegible] Lehrer bereit waren, die Untersuchung durchführen [illegible]

3) das Signifikanzniveau: Das Signifikanzniveau für die Zurückweisung oder Beibehaltung einer Hypothese läßt sich in der pädagogischen Forschung nur willkürlich festlegen. Üblich sind $p = 0.05$ und 0.01. Durch die Festlegung dieser Grenzen können prinzipiell zwei Fehler gemacht werden:

a) Risiko I. Art: Die Nullhypothese, daß kein Unterschied zwischen den Gruppen besteht, wird zurückgewiesen, obwohl diese richtig ist. Dieses Risiko ist um so größer, je größer der Wert für p ist.

b) Risiko II. Art: Die Nullhypothese wird beibehalten, obwohl sie falsch ist. Dieses Risiko ist um so größer, je niedriger der Wert für p ist.

Daraus folgt, daß das Risiko I nicht unabhängig von Risiko II ist. Eine Entscheidung für die Wahl eines Signifikanzniveaus von $p = 0.05$ für die Untersuchung basiert auf folgenden Überlegungen:
Die Bestätigung der Annahme einer Überlegenheit eines anwendungsorientierten Mathematikunterrichts gegenüber dem normalen Vorgehen impliziert langfristig eine erhebliche Änderung der Zielsetzung des Mathematikunterrichts. Deshalb erscheint es sinnvoll, einen möglichst geringen p-Wert zu wählen. Da aber sowohl durch die Wahl des χ^2-Tests, durch die Beschränkung der Hypothesen auf einzelne Aufgaben als auch durch den geringen Stichprobenumfang nur relativ große Behandlungseffekte nachweisbar sind, erschien ein Niveau von $p = 0.05$ das Risiko I. Art gering zu halten.

Ein weiteres Problem ergibt sich aus der Frage, ob man Hypothesen einseitig oder zweiseitig testet. In der Regel wird in schulpädagogischen Experimenten die Überlegenheit einer bestimmten Behandlung erwartet und dementsprechend die Hypothesen einseitig formuliert; d.h., es wird eine bestimmte Richtung des Behandlungseffektes angenommen (s. Hypothese 2,3,5 in dieser Arbeit). In diesem Fall müßten diese Hypothesen auch einseitig getestet werden. Auf der anderen Seite erhält man bei gleichen Unterschieden in den Daten bei einseitige Prüfung ein niedrigeres Signifikanzniveau als bei zweiseitiger Prüfung, wenn der Trend in den Daten in Richtung der Erwartung geht. Unterschiede können demnach je nach der Formulierung der Hypothesen signifikant oder nichtsignifikant werden. Da es keine rationalen Außenkriterien gibt, die die Willkürlichkeit der Hypothesenformulierung einschränken könnte, wurden in vorliegender Arbeit alle Hypothesen zweiseitig getestet. Die Stärke des Prüftests ist damit unabhängig von der Art des Aufgabentyps, auf die sich die vorliegenden Hypothesen (M- und P-Aufgaben) beziehen.

Zusammenfassend muß man feststellen, daß durch die Verletzung verschiedener Voraussetzungen für die Anwendung statistischer Tests die Bedeutung von Signifikanzangaben sehr stark relativiert werden muß. Diese Aussage bezieht sich nicht nur auf vorliegende Untersuchung, sondern gilt generell für jede Art von Signifikanzprüfung statistischer Hypothesen in der Psychologie. Dies steht im Widerspruch zu der zunehmenden Selbstverständlichkeit in der Anwendung von Signifikanztests in der Literatur, was HENKEL/MORRISON (1970, S. 311) damit begründen,

"because use is a strong norm in the discipline."

Diese Norm zu verändern, ist nicht Sache des einzelnen, sondern muß auf dem Konsens der Vertreter einer Disziplin beruhen. Eine Entscheidung hierüber steht aber noch aus.